NEWTO
ARITH
CVM
LECC
P.II

234 pp + 1e, n.n.

Coll.

IN ARITHMETICAM UNIVERSALEM ISAACI NEWTONI COMMENTARIA.

LIBER II.

PARS III.

ARITHMETICA
UNIVERSALIS
ISAACI NEWTONI

SIVE

DE COMPOSITIONE
ET RESOLUTIONE
ARITHMETICA

PERPETUIS COMMENTARIIS
ILLUSTRATA ET AUCTA

AUCTORE
P. ANTONIO LECCHI S. J.
IN UNIVERSITATE BRAYDENSI
MATHESEOS PROFESSORE.

MEDIOLANI MDCCLII.
EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROS.
APUD JOSEPH MARELLUM
SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

PARS TERTIA.

DE RATIONIBUS, ET PROGRESSIONIBUS.

PRoportionum doctrina, sive utilitatem spectes, tanti momenti ea est, ut calculi numerici, & litteralis scientia ferè omnis ex illa derivetur: æquationum, & geometricarum constructionum regulæ inde pendeant; ac totius analyticæ artis principium sit, & fons: sive amplitudinem, ita Geometriam, Physicam, reliquasque naturales scientias complectitur, ut ex omnibus ars velut una nunc dierum effecta sit, quam propterea Newtonus jure vocat Arithmeticam universalem. Cum enim proportio in omne genus irrepat earum rerum, quæ naturam sapiunt quantitatis, cujusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, pondera, potentiæ &c., hinc factum est, ut in rerum natura quæstio ferè nulla sit, quam adhibitis proportionum regulis non veluti suam agnoscat Analysis, atque expediat. Rationum itaque scientiam, quam meritò dixeris totius Analysis dialecticam, præcipuosque argumentandi modos, quos tradit Euclides lib. 5. elem. universalius tractare decrevi.

CAPUT PRIMUM.

Synopsis.

Ratio quantitatum ex earum comparatione. Comparatio duplex: hinc ratio duplex, arithmetica, & geometrica: utriusque discrimen. Quid sit proportio, arithmetica, & geometrica, discreta, vel continua: utriusque notatio. Progressio duplex: ejusdem notatio: utraque vel continua, vel discreta. Proportionis arithmeticæ præcipua proprietas demonstratur; ac proinde in quavis proportione arithmetica duobus, vel tribus datis reliqua determinantur. Quæstiones aliquot indeterminatæ, & limites constituti.

Definitiones.

Quid sit ratio, proportio, & progressio.

Quantitatum invicem comparatio.

1. Quando duæ magnitudines inter se mutuò comparantur, quò sciri possit, quid una sit respectu alterius, cognitio, quæ hinc acquiritur, est id, quod *Ratio* duarum magnitudinum solet appellari. *Ratio* itaque *est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem habitudo.*

Ratio quantitatum.

2. Dicitur Ratio, inquit Jacobus Bernoullius tom. 1. n. 34., vel quòd in percipiendis rerum rationibus præcipua Rationis vis appareat, vel quòd in rebus ipsis Ratio vix quidquam aliud cognoscat, quàm rationes, & relationes quasdam, quas inter se habent. Idipsum in Geometria, & Mathesi universa perspicuum est, ubi nullius rei quantitatem absolutam, seu quanta sit in se, cognoscimus; sed solummodo quàm magna sit, vel quàm parva relativè ad alias investigamus.

3. Quantitates autem comparandas nonnisi homogeneas, idest ejusdem generis esse oportere nemo non videt. Sic lineas lineis comparamus, superficies superficiebus, corpora item corporibus, & numeros numeris, pondera ponderibus &c. Sed tantùm homogenearum.

4. Quantitates autem homogeneæ dicuntur illæ, quarum una aliquoties sumpta alteram superare potest: heterogeneæ verò, quarum una, si aliquoties sumatur, alteram excedere nequit. Sic linea potest adeo augeri, ut alteram superet lineam, nunquam verò superficiem &c.

Quidquid vel per se, vel per accidens quantitatis, aut mensurationis capax est, ad alia sibi homogenea secundùm quantitatem comparari potest, cujusmodi sunt tempus, soni, voces, spatia, motus, pondera, vires &c.

5. Hæc comparatio duplex est. In prima quæritur duarum quantitatum differentia, Ratio duplex.

rentia, quæ dicitur *Ratio arithmetica*, & subductione investigatur. Sic ratio septenarii ad ternarium est excessus, seu differentia 4. Utriusque discrimen.

6. IN secunda quæritur, quoties una major minorve sit alterà, seu quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur: quæ dicitur *Ratio geometrica*, & divisione deprehenditur; nam quotus ostendit rationem dividui ad divisorem, nempe quoties una quantitas alteram contineat. Sic ratio *6* ad 2 deprehenditur dividendo *6* per 2. Quotus 3 vocatur etiam exponens duarum magnitudinum, seu exponens rationis.

Scholion.

QUamvis mos ille loquendi jam obtinuerit, ut differentia vocetur *Ratio arithmetica*; tamen ratio non nisi de ea, quam vocant rationem geometricam, ab Euclide, aliisque antiquis usurpari consuevit.

7. UTrovis modo quantitates comparentur, antecedentem voco terminum, cujus est exponenda ratio: consequentem voco illum, ad quem habere dicitur proportionem.

8. SIcuti duæ magnitudines inter se mutuò comparantur; ita duæ rationes peræque conferri possunt.

9.

9. PRoportio itaque est duarum rationum æqualitas: unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, cum ratio inter primam, & secundam æqualis est rationi inter tertiam, & quartam. Quid sit proportio.

10. ÆQualitas autem duarum rationum arithmeticarum, idest æqualitas excessuum, vel defectuum vocatur proportio arithmetica. Arithmetica. Æqualitas duarum rationum geometricarum, idest æqualitas quotorum, proportio geometrica appellatur. Et Geometrica.

11. UTraque proportio quatuor terminos requirit, cum utraque sit æqualitas duarum rationum, quarum unaquæque duos terminos postulat; sed possunt unaquæque sub tribus consistere, cum terminus medius bis sumitur, in quo casu proportio dicitur continua. Utraque vel discreta. Vel continua.

12. PRoportio arithmetica quatuor terminorum ita notatur: $a.b.\because.c.d$, vel $a.b = c.d$. Utriusque notatio.

Proportio geometrica quatuor terminorum ita exprimitur: $a.b::c.d$, sive $a:b::c:d$, vel $a:b=c:d$. Primus terminus *a* dicitur primum antecedens, & secundus *b* primum consequens: tertius *c* secundum antecedens, & quartus *d* secundum consequens. Præterea primus, & ultimus vocantur Extrema, secundus, & tertius Media.

Scho-

Scholion.

Cum æqualitas duarum rationum arithmeticarum sit æqualitas excessuum, vel defectuum ex n. 10., hinc ad indicandam proportionalitatem arithmeticam quatuor magnitudinum a, b, c, d scribi etiam solet $a-b=c-d$, vel $b-a=d-c$.

Itaque signum $=$ designat in arithmetica æqualitatem differentiarum, in geometrica æqualitatem quotientum.

13. Proportio arithmetica continua 7.5 ∴ 5.3 sic etiam scribitur, ∴ 7.5.3, vel ÷ 7.5.3.

Proportio geometrica continua 12 : 6 :: 6 : 3 notari pariter solet hoc modo :: 12.6.3, vel ∺ 12.6.3

Medius proportionalis.

14. In utraque proportione terminus medius (qui bis effertur, & est consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis) dicitur medius proportionalis.

Progressio duplex.

15. Similiter ex duplici hac sive numerorum, sive quantitatum quarumlibet homogenearum comparatione duplex oritur progressio, quarũ altera arithmetica dicitur, altera geometrica.

Utriusque notatio.

16. Progressio arithmetica dicitur, ubi numeri plures, aliæque quantitates invicem homogeneæ æqualibus differentiis, sive excessibus, sive defectibus procedunt: sic 2.5 ∴ 5.8 ∴ 8.11 ∴ 11.14 ∴ 14.17: hæc compendiosiùs sic notari solet ÷ 2.5.8 &c.

17. Progressio geometrica dicitur, ubi plures numeri, aliæque quantitates invicem homogeneæ æqualibus quotis ex divisione majoris numeri per minorem progrediuntur: sic 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16, vel breviùs ::, vel ∺ 2.4.8.16 &c.

In progressione arithmetica communis excessus, sive differentia speciem determinat: in geometrica autem communis quotiens progressionis.

Utraque vel continua, vel disjuncta.

18. Harum autem progressionum utraque est vel continua, vel discreta. Illa, ubi quantitates continuè positæ æqualibus differentiis, aut quotis ubique procedunt: hæc, ubi eadem quidem differentia, aut idem quotus identidem redit, sed non continuè. In illa quilibet terminus intermedius tum antecedens est, tum consequens communis, sive differentiæ, sive quoti: in hac non item: sic 3, 5, 7, 9, 11 sunt in progressione arithmetica continua; at 3, 5; 9, 11; 5, 7 sunt in progressione arithmetica discreta, seu interrupta. Eodem modo 2.4.8.16.32 sunt in progressione geometrica continua; at 2 : 4 :: 3 : 6 :: 4 : 8 sunt in progressione geometrica discreta.

Utriusque rationis, proportionis, progressionis,

ſionis, tum arithmeticæ, tum geometricæ definitionibus expoſitis, reliquum jam eſt, ut ſingularum affectiones ſeorſim perſequamur.

De proportione arithmetica.

THEOREMA I.

19. IN omni proportione arithmetica ſumma extremorum eſt æqualis ſummæ mediorum; &, ſi proportio continua ſit, ſumma extremorum eſt dupla medii.

Demonſtratur. Sola litteralis expreſſio rem oculis ſubjicit, & demonſtrat. Cum enim ex n. 10. proportio arithmetica ſit æqualitas exceſſuum, vel defectuum, ſi primus terminus dicatur a, exceſſus, vel defectus $\pm b$ erit ſecundus terminus $a \pm b$. Itaque $\div a, a \pm b, a \pm 2b$ repræſentat quamlibet proportionem continuam trium terminorum creſcentium, vel decreſcentium; vel $a.a \pm b \therefore c.c \pm b$ proportionem diſcretam quatuor terminorum. Jam verò in prima facilè apparet ſummam extremorum æquari duplo medii: in utraque autem, ſi modo quatuor termini fuerint arithmeticè proportionales, ſive continuè, ſive diſcretim, perſpicuum eſt ſummam ex primo, & quarto termino æqualem eſſe ſummæ ex ſecundo, & tertio. Quod erat &c.

Aliter.

20. SInt rurſum quatuor magnitudines arithmeticè proportionales, $a.b \therefore c.d$: dico $a+d=b+c$.

Cum enim ex n. 10., & 12. ſit $a-b=c-d$, ſi utrinque adjiciatur $+d$, fiet $a-b+d=c$; ac proinde $a+d=b+c$. Quod erat &c.

Pariter, ſi fuerint tres magnitudines continuò arithmeticè proportionales $\div a.b.c$; dico $a+c=2b$.

Nam ex n. 10., & 12. eſt $a-b=b-c$; adeoque $a+c=2b$. Quod erat &c.

THEOREMA II.

21. SI fuerint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus ſumma extremarum $a+d$ ſit æqualis ſummæ mediarum $b+c$; dico illas fore arithmeticè proportionales $a.b \therefore c.d$; vel $a-b=c-d$.

Nam per hypotheſim $a+d=b+c$; adeoque $a-b=c-d$. Quod erat &c.

Pariter, ſi fuerit $a+c=2b$, erit $a-b=b-c$; adeoque $a.b \therefore b.c$. Quod erat &c.

COROLLARIUM. I.

22. DAtis tribus numeris a, b, c, inveniri poteſt quartus x arithmeticè proportionalis. Sit enim $a.b \therefore c.x$: ergo per theor. $a+x=b+c$; & per reductionem $x=b+c-a$. Hinc regula generalis: accipe ſummam mediorum, ab eaque ſubtrahe primum, reſiduum erit quartus quæſitus. Simili methodo datis tribus invenies tertium $a.b \therefore x.c$, vel ſecundum $a.x \therefore b.c$, vel primum $x.a \therefore b.c$, totidemque

demque per Analyſim regulas generales elicies.

Corollarium II.

23. Datis duobus numeris inveniri poteſt tertius arithmeticè proportionalis. Sit enim $\div a . b . x$: ergo per theor. $a + x = 2b$; adeoque $x = 2b - a$. Hinc regula: a duplo ſecundi aufer primum, reſiduum erit tertius quæſitus.

Corollarium III.

24. Datis duobus numeris inveniri poteſt medius arithmeticus. Eſto $\therefore a . x . b$: erit per theor. $2x = a + b$; & $x = \frac{a+b}{2}$. Semiſſis ergo aggregati ex termino primo, & tertio dat terminum ſecundum.

Corollarium IV.

25. Datis duobus mediis quatuor continuè proportionalium arithmeticè, ut a, & b, facilè innoteſcet primus, quem voco x. Nam, ſi fiat $x . a \because a . b$, erit per theor. $x + b = 2a$; & hinc $x = 2a - b$.

Eadem ratione innoteſcet etiam quartus, quem voco y. Fiat enim $a . b \because b . y$: erit $a + y = 2b$; adeoque $y = 2b - a$. Sunt ergo $2a - b$, a, b, $2b - a$ quatuor termini continuè proportionales arithmeticè. Quod notabis ex Newtoni

Newtoni Arith. univerſali probl. geom. 14.

Corollarium V.

26. Quatuor termini proportionis arithmeticæ erunt ſemper proportionales, quocunque modo collocentur, aut transponantur, ſi modò extrema ſemper maneant extrema, aut ambo fiant media.

Quæstio I.

27. Datum numerum $20 = a$ partiri in duas partes, quæ cum ipſo proportionem arithmeticam conſtituant.

Si minor dicatur x, major erit $a - x$; adeoque $\div x$, $a - x$, a erunt tres termini arithmeticè proportionales. Itaque per theor. $x + a = 2a - 2x$ &c.

Aliter. Quoniam x, $a - x$, a ſunt in proportione continua arithmetica, erit ex n. 10. exceſſus ſecundi ſupra primum æqualis exceſſui tertii ſupra ſecundum: hinc æquatio $a - 2x = x$ &c.

Quæstio II.

28. Quatuor Mercatores ſummam librarum 160. inter ſe ita partiri debent, ut primus accipiat $20 = a$, quartus $60 = b$. Quæritur portio ſecundi $= x$, & portio tertii $= y$, hac conditione, ut quatuor partes ſint in proportione arithmetica?

Ex

Ex conditione probl. $a . x \therefore y . b$
& per Theor. I. $x + y = a + b$
$y = a + b - x$

Cum verò omnes problematis conditiones impletæ jam sint, constat quæstionem indeterminatam esse; atque adeo pro incognita x sumi posse pro libito numerum quemlibet, dummodo minor sit eàdem summà $a + b = 20 + 60 = 80$, ut valor y prodeat positivus.

Limites.

Itaque posito $x = 2$, erit $y = 20 + 60 - 2 = 78$; & quatuor partes erunt in proportione arithmetica $20 . 2 \therefore 78 . 60$, quorum differentia 18, & summa 160.

Similiter, si ponatur $x = 10$, invenies quatuor partes 20, 10, 70, 60 in proportione arithmetica, quarum summa 160, & differentia 10; atque ita porro, si aliæ ex aliis intra eosdem limites suppositiones fiant.

Si verò conditio problematis præscribat, ut quatuor partes debeant esse in proportione arithmetica crescente, in hoc casu quantitas incognita x minor quidem esse deberet, quàm summa $a + b = 80$ propter æquationem $y = a + b - x$; sed utique major quantitate $a = 20$. Quare, si valor arbitrarius x determinetur inter hosce limites 20, & 80, satisfieri poterit quæstioni. Nam posito $x = 25$, invenies 20, 25, 55, 60; & posito $x = 30$, invenies 20, 30, 50, 60; atque ita de reliquis.

QUÆ-

QUÆSTIO III.

29. Pater moriens testamento legavit summam librarum 6200 inter quatuor filios distribuendam hac lege, ut natu major haberet 2500, & residuum dividerent inter se tres reliqui filii, ita ut quatuor partes essent arithmeticè proportionales.

Portio primi vocetur $a = 2500$, secundi x, tertii z, quarti y; erit ex conditione problematis $a . x \therefore z . y$; adeoque $a + y = x + z$. Cum autem hæ duæ summæ simul sumptæ conficere debeant summam totalem 6200, erunt singulæ æquales semissi ejusdem numeri; & consequenter $a + y = 3100$, & $y = 3100 - a = 3100 - 2500 = 600 = c$ portio quarti.

Ut reliquorum portiones eliciantur, consideretur æquatio $x + z = a + y = a + c$;
& consequenter $x = a + c - z$.

Constat itaque quæstionem esse indeterminatam, atque arbitrariam z minorem esse debere $a + c = 3100$, ut valor x prodeat positivus. Quamobrem pro arbitraria z sumi poterit pro libito numerus quivis, modò sit infra 3100; & satisfacies quæstioni. Nam, si ponatur $z = 2000$, erit $x = 1100$; atque hinc quatuor partes in proportione arithmetica erunt 2500, 1100, 2000, 600, quarum summa 6200, & differentia 1400; atque ita porro de reliquis suppositionibus.

 Sin

Sin verò conditio problematis præscribat præterea, ut quatuor partes esse debeant in proportione arithmetica decrescente, in eo casu non amplius z, sed incognita x seligi debet pro indeterminata; atque adeo æquatio sic transformabitur $x + z = a + c$;

$$z = a + c - x.$$

Ubi vides arbitrariam x non solùm esse debere minorem summà $a + c$, ut resolutio prodeat positiva, verùm etiam minorem quantitate $a = 2500$, ut jubet problema: hac tamen lege, ut rursum valor ipsius z, qui inde elicietur, minor sit quàm x, & major quàm c: quod declarat sumi oportere valorem x majorem semisse ipsius $a + c = 3100$.

Ponatur $x = 2000$: erit $z = 3100 - 2000 = 1100$. Cum verò 1100 minor sit quàm $x = 2000$, & major quàm $c = 600$, satisfactum fuisset conditionibus problematis; & quatuor partes 2500, 2000, 1100, 600 essent in arithmetica proportione decrescente, quarum summa 6200, & differentia 500.

CAPUT SECUNDUM.

De progressione Arithmetica.

SYNOPSIS.

Progressio arithmetica quid, & quotuplex sit: simplicissima, quæ a cyphra, seu o inchoatur. Ex analytica ejusdem expressione sequitur inventio termini maximi, minimi, differentiæ, numeri terminorum, & summæ progressionis. Ex varia horum quinque combinatione, datis tribus reliqua duo facilè determinantur. Hinc, quò familiarior reddatur progressionis arithmeticæ doctrina, series problematum exponitur, quæ & exemplo physico Galilæanæ gravium accelerationis accommodatur, & ad abstractos numeros eadem generaliùs traducitur. Quæstiones aliquot indeterminatæ. Affectiones progressionis arithmeticæ numerorum imparium; & quomodo ex eorumdem additione potentiæ cujuscunque gradus procreentur.

DEFINITIO.

30. Series magnitudinum secundùm eamdem differentiam crescentium, vel decrescentium dicitur progressio arithmetica. Hujusmodi est series magnitudinum continuò arithmeticè proportionalium $a . a + m . a + 2m . a + 3m . a + 4m . a + 5m$ &c.; quemadmodum etiam series magnitudinum $a . a - m . a - 2m . a - 3m . a - 4m . a - 5m$. Altera progressionem arithmeticam ascendentem, altera progressionem arithmeticam descendentem exhibet.

SCHOLION.

31. Arithmetica progressio simplicissima, & maximè naturalis, inquit Wallisius

sius cap. 21. Alg., est, quæ incipit ab o, sive crescendo, sive decrescendo.

$$o. \quad a. \quad 2a. \quad 3a. \quad 4a \text{ \&c.}$$
$$o.-a.-2a.-3a.-4a \text{ \&c.}$$

Hæc consideratio usum habet insignem in pluribus, ac præsertim ubi de Logarithmis, eorumque origine, & usu agendum erit.

Sin autem progressio arithmetica ab alio quovis termino inchoatur, ut in exposita serie $a.a \pm m.a \pm 2m$ &c., hæc, inquit Wallisius, est revera duarum potius progressionum aggregatio, puta, æqualium $a.a.a.a$; aliaque addita, demptave $o.\pm m.\pm 2m$ &c.

$$\begin{array}{ccccc} a. & a. & a. & a. & a \\ o. & \pm m. & \pm 2m. & \pm 3m. & \pm 4m \\ \hline a. & a \pm m. & a \pm 2m. & a \pm 3m. & a \pm 4m \end{array}$$

COROLLARIUM I.

Inventio cujuslibet termini.

32. QUilibet terminus progressionis arithmeticæ ascendentis continet primum, seu minimum, & toties communem excessum, quot post primum usque ad ipsum inclusivè sunt termini.

COROLLARIUM II.

Inventio termini maximi.

33. HAbetur igitur maximus terminus $a + 5m$, si excessus m ducatur in numerum

merum terminorum unitate mulctatum $6-1 = 5$, & producto $5m$ addatur minimus a, idest $a+5m$. Sola litteralis expressio has omnes affectiones evidenter demonstrat.

COROLLARIUM III.

34. IN omni progressione arithmetica tam ascendente, quàm descendente summa termini primi, & ultimi æqualis est summæ duorum quorumlibet mediorum ab ipsis æqualiter distantium, aut medii duplo, si numerus terminorum sit impar.

Exponatur analyticè progressio utraque: a, $a \pm m$, $a \pm 2m$, $a \pm 3m$, $a \pm 4m$, $a \pm 5m$ $a \pm 6m$.

Summa termini primi, & ultimi $= 2a \pm 6m$;
Summa termini secundi, & penult. $= 2a \pm 6m$;
Duplum medii $= 2a \pm 6m$.

COROLLARIUM IV.

35. PRogressionis arithmeticæ terminus quicunque dimidius est summæ duorum a se æqualiter distantium.

THEOREMA I.

Inventio differentiæ.

36. IN omni progressione arithmetica ascendente, si primus terminus auferatur ab ultimo, & residuum dividatur per numerum

 ter-

terminorum unitate mulctatum, quotiens erit differentia terminorum totius progressionis.

Cum enim per n. 33. progressionis crescentis maximus, hoc est, ultimus terminus habeatur, si differentia ducatur in numerum terminorum unitate mulctatum, & producto addatur minimus, idest terminus primus; hinc sequitur, quòd si numerus terminorum vocetur n, & idem numerus terminorum unitate mulctatus $n-1$, differentia m ducta in $n-1$ erit $nm-m$: cui si addatur primus terminus a, erit per n. 33. $a+nm-m$ terminus ultimus progressionis. Quare, si ab ultimo termino auferatur primus a, & residuum $nm-m$ dividatur per $n-1$, quotiens erit differentia quæsita m. Quod erat &c.

THEOREMA II.

37. In omni progressione arithmetica ascendente, si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per differentiam, quotiens erit numerus terminorum unitate mulctatus.

Inventio numeri terminorum.

Ex Coroll. II. n. 33. terminus ultimus est $a+nm-m$, a quo si subtrahatur terminus primus a, & residuum $nm-m$ dividatur per differentiam m, quotiens erit $n-1$, idest numerus terminorum unitate mulctatus.

THEO-

THEOREMA III.

38. In qualibet progressione arithmetica habetur summa totius progressionis, si summa extremorum ducatur in semissem numeri terminorum.

Inventio summæ progressionis.

Casus I.

Sit primò numerus terminorum par, a, b, c, d, e, f, g, h. Per n. 34. patet summas binarias $a+h$, $b+g$ &c. esse inter se æquales: ergo summa progressionis est æqualis hisce quatuor summis $a+h$, $b+g$, $c+f$, $d+e$ inter se æqualibus. Earum autem numerus est æqualis dimidio numero terminorum: ergo una ex his summis binariis, puta, $a+h$ summa extremorum ducta in dimidium numerum terminorum æquabitur summæ totius progressionis; perinde enim est hasce quatuor summas simul accipere, & summam extremorum quater sumere, idest, eamdem ducere in semissem numeri terminorum. Quod erat &c.

Casus II.

Si numerus terminorum sit impar, puta, a, b, c, d, e, f, g, erunt per n. 34. inter se æquales summæ binariæ $a+g$, $b+f$, $c+e$; & terminus medius d æquabitur semissi cujuslibet summæ binariæ. Quare eòdem recidere

 vides,

vides, five tres fummas æquales cum femiffe unius accipias, five fummam extremorum ducas in $3\frac{1}{2}$ femiffem numeri terminorum.

Vel ad vitandas fractiones, fi numerus terminorum fit impar, terminus medius in numerum terminorum ductus exhibet fummam totius progreffionis; nam per n. 34. terminus medius eft femiffis fummæ extremorum. Jam verò perinde eft, five fummam extremorum, quæ dupla eft termini medii ducas in femiffem numeri terminorum, five terminum medium, ideft, femiffem fummæ extremorum ducas in numerum terminorum.

Scholion.

39. SI progreffio incipiat a zero, ut dictum eft n. 31., fumma ex primo, & ultimo erit folus terminus ultimus, qui multiplicandus erit per femiffem numeri terminorum, ut habeatur fumma progreffionis.

Corollarium I.

40. DAtà fummà progreffionis, & fummà extremorum, datur quoque numerus terminorum; nam dividendo primam per fecundam, quotiens eft femiffis numeri terminorum.

Corollarium II.

41. DAtis fummà progreffionis, fummà extremorum, & præterea termino primo, datur pariter differentia; fi enim terminus primus bis auferatur a fumma extremorum, refiduum erit differentia ducta in numerum terminorum unitate mulctatum.

Corollarium III.

42. DAtis fummà progreffionis, & numero terminorum, datur fumma extremorum; nam ex divifione fummæ progreffionis per femiffem numeri terminorum prodit pro quotiente fumma extremorum.

Scholion.

43. IN omni arithmetica progreffione quinque funt, quæ confiderari poffunt, terminus primus, terminus ultimus, numerus terminorum, differentia, & fumma totius progreffionis. Datis tribus duo reliqua facilè determinantur, ut conftabit ex fequentibus quæftionibus ad Tyronum exercitationem propofitis.

Monitum.

44. QUamvis progreffio arithmetica five crefcendo, five decrefcendo fieri poffit; ego

ego tamen in iis, quæ ſubdere placet, problêmatis, illam tanquam creſcentem conſidero. Propterea ſi quis ea decreſcenti ſeriei accommodare velit, id fiet mutatis tantùm hiſce vocibus primo, & ultimo: nempe, quæ jam de primo creſcentis dicuntur, illic de termino ultimo decreſcentis ſeriei intelligenda erunt: quæ hìc de ultimo, illic de primo. Quod ſemel dictum ſit, ne ſæpius oporteat utrumque caſum ſeorſim proponere.

Eſto exemplum ex Phyſica, ſeu Statica depromptum, quod caſus omnes complectetur progreſſionis arithmeticæ, quorum pleroſque hoc loco attingam. Demonſtravit Galilæus ſpatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit in libero deſcenſu, creſcere temporibus æqualibus ſecundùm ſeriem arithmeticam numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c. Sit itaque

PROBLEMA I.

45. Corpus grave liberè decidens primo tempuſculo 3 ulnas conficit, ſecundo 5, tertio 7; & ſic deinceps cum eodem incremento motus uniformiter accelerati. Quæritur, quot ulnas decimo tempuſculo conficiet?

Idem generalius.

Datis in progreſſione arithmetica termino primo 3, & communi terminorum exceſſu 2, & numero terminorum 10, terminum ultimum, aliumve in progreſſione quemlibet inveſtigare.

Invenies terminum ultimum per num. 32. & 33.

PROBLEMA II.

46. Iſdem poſitis, quæratur inſuper, quot ulnas intra decem tempuſcula æqualia confecerit.

Idem generalius.

Datis in progreſſione arithmetica termino primo 3, & communi exceſſu 2, & numero terminorum 10, invenire ſummam progreſſionis.

Per n. 33. inveniatur maximus; dein per n. 38. dabitur ſumma progreſſionis.

PROBLEMA III.

47. Si quæratur quoto deſcenſus tempuſculo confecerit 15 ulnas.

Idem generalius.

Datis in progreſſione arithmetica termino primo cum exceſſu communi, & alterius cujuſvis termini valore, invenire quoto loco in ſerie terminus ille reperitur; vel, quod perinde de est, datis termino primo, & ultimo, atque differentià terminorum, invenire numerum terminorum, &, si libeat, summam etiam progressionis.

Sit terminus primus $3 = a$: ultimus $15 = b$: differentia $2 = d$: numerus terminorum $= x$: summa progressionis $= y$. Itaque per n. 33. $b = a + dx - d$; & per n. 38. $y = \frac{1}{2}x(b+a)$. Quæratur valor x in prima æquatione: erit $x = \frac{b+d-a}{d}$. Hic valor substituatur in secunda æquatione: erit $y = \left(\frac{b+d-a}{2d}\right)(b+a) = \frac{b^2+bd+ad-a^2}{2d} = \frac{b+a}{2} + \frac{b^2-a^2}{2d}$. Substituantur jam litteris determinati earum valores: invenies &c.

PROBLEMA IV.

48. Quid si grave descendens tres ulnas confecerit primo tempusculo, & decimo ulnas 21, & quæratur communis excessus?

Idem generalius.

Datis in progressione arithmetica termino primo, & ultimo, & numero terminorum, invenire differentiam, atque etiam summam progressionis.

Per n. 19. invenies differentiam terminorum, & per n. 38. summam progressionis.

PROBLEMA V.

49. Si totum spatium peragratum sit ulnarum 120 tempusculis 10 confectum uniformi incremento 2 ulnarum, & quæratur primi tempusculi spatium.

Idem generalius.

Datis in arithmetica progressione differentià, & numero terminorum, unà cum summa progressionis, invenire terminum primum, & etiam, si velis, ultimum.

Sit numerus terminorum $10 = n$: differentia $2 = d$: summa $120 = c$: terminus primus $= x$: ultimus $= y$. Itaque per n. 33. erit $y = x + nd - d$; & per n. 38. erit $c = \frac{1}{2}n(x+y)$. Quæratur valor y in hac secunda æquatione: invenies $y = \frac{2c}{n} - x = x + nd - d$ ex prima æquatione; & per reductionem $x = \frac{c}{n} + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}nd$ &c.

Eodem modo ex tribus datis reliqua per Analysim investigabis.

PRO-

PROBLEMA VI.

50. Artifex primo die ex pacto lucratus est duos solidos; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti cum augmento semper solidorum 3: lucri summa fuit 57 solid. Quæruntur dies operi impensi?

Idem generalius.

Datis termino primo $2 = a$, differentià $3 = d$, & progressionis arithmeticæ summà $57 = c$, invenire numerum terminorum $= x$, & terminum ultimum $= y$.

Per n. 33. $y = a + dx - d$; per n. 38. $c = \frac{1}{2}x\,(a + y)$. Quæratur valor y in hac secunda æquatione, quæ in hanc transformabitur per reductionem $\frac{2c - ax}{x} = y$; hinc per æqualitatem valorum ejusdem y elicietur æquatio finalis $\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d}x$. Ut autem abbrevientur termini, fiat $\frac{2a - d}{d} = m$

hinc $\frac{2c}{d} = x^2 + mx$

Adde $\frac{1}{4}m^2$, erit $\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d} = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}\right)} = x + \frac{1}{2}m$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}\right)} - \frac{1}{2}m = x$$

Sub-

Substituantur jam litteris determinati earum valores. Cum enim ponatur $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, erit $m = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3}$; & consequenter $x = \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{114}{3}\right)} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$; & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA VII.

51. Duo Tabellarii eodem tempore discesserunt, alter Parisiis Lugdunum versùs, conficiens diebus singulis duas leucas plusquam præcedenti die: alter Lugduno Parisios versùs, conficiens diebus singulis tres leucas plusquam præcedenti die. Præcisè medio in itinere obviam invicem facti sunt, primus post quinque dies, secundus post quatuor. Locorum distantia supponitur 100 leucarum. Quæritur numerus leucarum, quas singulis diebus quilibet confecerit?

Habemus hìc duas arithmeticas progressiones, quarum prima est Tabellarii Parisiensis, altera Tabellarii Lugdunensis. In utraque datur differentia, & numerus terminorum, & summa progressionis, quæ utrobique ex conditione problematis æquatur 50 leucis. Quæritur terminus primus, & ultimus utriusque progressionis?

Invenies progressionē primā esse 6, 8, 10, 12, 14; secundam esse 8, 11, 14, 17.

PRO-

PROBLEMA VIII.

52. Miles transfuga ex arce fugiens diebus singulis æquabili itinere absolvit 10 leucas. Præsidiarius, qui illum insequitur, conficit 3 leucas primo die, 5 leucas secundo, 7 tertio; atque ita porro de reliquis cum incremento duarum leucarum in dies singulos. Quæritur, quoto dierum numero Præsidiarius transfugam assequetur?

Præsidiarii iter progressionem arithmeticam exhibet, cujus terminus primus est 3, differentia 2, & reliqua incognita sunt. Sed quæstionis statu rite explorato, statim facili, & obvio discursu assequor progressionis summam esse $10x$. Cum enim transfuga 10 leucas quotidie absolvat, numerus leucarum, quas jam confecit, quo tempore Præsidiarius illum assequetur, æqualis erit numero 10 ducto in numerum terminorum ejusdem progressionis, hoc est, ducto in numerum dierum, quos Præsidiarius impenderit, ut eumdem assequatur. Quare, si numerus terminorum vocetur x, summa progressionis est $10x$.

His animadversis, esto terminus primus $3 = a$, differentia $2 = b$, numerus terminorum unitate mulctatus $x - 1$: erit per n. 33. $a + dx - d$ terminus ultimus progressionis; & $2a + dx - d$ summa extremorum, quam si ducas in $\frac{1}{2}x$, erit per n. 38. $ax + \frac{1}{2}dxx - \frac{1}{2}dx$ summa progressionis. Sit $10 = b$, & $10x = bx$: hinc tibi prodit æquatio finalis $ax + \frac{1}{2}dxx - \frac{1}{2}dx = bx$; divisisque terminis omnibus per communem divisorem x, factaque reductione, invenies $x = \frac{2b - 2a + d}{d} = 8$: hinc series progressionis erit $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$.

Datorum in problemate positionem paulo aliter invertas licet. Pone itaque a Præsidiario confectas fuisse 3 leucas primo die, & 17 leucas ultimo; & transfugam, qui æquabili cursu 10 leucas in dies constanter absolvit, confecisse 80, quo tempore a Præsidiario insequente comprehensus est. Quæratur numerus terminorum, & differentia progressionis.

Fiat terminus primus $3 = a$: ultimus $17 = c$: summa progressionis $80 = s$: numerus terminorum x. Ergo $10x = s$; & $x = \frac{s}{10} = 8$: Superest cognoscenda differentia progressionis. Fiat rursum inventus terminorum numerus $8 = n$: differentia y: erit per n. 33. terminus ultimus $a + ny - y = c$; & per reductionem $y = \frac{c - a}{n - 1} = 2$.

Denique si ponas Præsidiarium octavo die transfugam assecutum fuisse, ac primo die 3 leucas eumdem absolvisse; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, adjecto tamen semper constanti leucarum incremento; & quæratur differentia progressionis, & terminus ultimus, priori tamen suppositione manente, quòd transfuga, qui fugiendo æqua-

æquabili itinere 10 leucas in dies ſemper abſolvit, confecerit 80, quo tempore Præſidiarius illum aſſecutus eſt.

Eſto itaque $3 = a : 80 = s : 8 = n : 10 = b$; & conſequenter $bn = s$. Vocetur differentia y: terminus ultimus erit $a + ny - y$; ſumma extremorum $2a + ny - y$ ducta in $\frac{1}{2}n$ dabit ſummam progreſſionis $na + \frac{1}{2}nny - \frac{1}{2}ny = bn$; & per reductionem $y = \frac{2b - 2a}{n - 1} = 2$. Inventà differentià facilè terminum ultimum obtinebis per n. 33.

PROBLEMA IX.

53. Datis totius progreſſionis ſummà $1162 = a$, & extremorum ſummà $83 = b$, inveſtigare terminum primum, & differentiam terminorum.

Ex his datis per n. 40. inveniatur terminorum numerus $= \frac{a}{b} \times 2 = 28 = n$. Sit terminus primus x: differentia y: numerus terminorum unitate mulctatus $n - 1$; & conſequenter per n. 33. ultimus terminus erit $x + ny - y$; & ſumma extremorum $2x + ny - y = b$ ex condit. probl.; & per reductionem $y = \frac{b - 2x}{n - 1}$. Cum verò conditiones problematis omnes exhauſtæ ſint, hæc ultima æquatio oſtendit quæſtionem eſſe indeterminatam, ſimulque limites ſolutionum aperit; nam $2x$

ita

ita ſubduci debet abs $83 = b$, ut reſiduum dividi exactè poſſit per $n - 1$, hoc eſt, per 27.

Itaque I. ponatur $2x = 2$, & $x = 1$: ergo $y = \frac{81}{27} = 3$. Hinc terminus primus 1, differentia 3, & progreſſio 1.4.7.10.13.16.19.22 &c. ultimus 82.

II. Ponatur $2x = 29$: ergo $y = \frac{83 - 29}{27} = \frac{54}{27} = 2$, & $x = 14\frac{1}{2}$; & progreſſio erit $14\frac{1}{2}.\ 16\frac{1}{2}.\ 18\frac{1}{2}.\ 20\frac{1}{2}.\ 22\frac{1}{2}.\ 24\frac{1}{2}$ &c. ultimus $68\frac{1}{2}$.

III. Pone rurſum $2x = 56$: ergo $y = \frac{83 - 56}{27} = \frac{27}{27} = 1$, & $x = 28$; & progreſſio erit 28.29.30.31 &c. ultimus 55.

PROBLEMA X.

54. Datà progreſſionis ſummà $1162 = a$, & terminorum numero $28 = n$, quæritur terminus primus, & ultimus, & differentia progreſſionis?

Per n. 42 invenietur ſumma extremorum $= 83$. Vocetur itaque primus terminus x: differentia y: invenies $y = \frac{83 - 2x}{27}$: valor x rite determinatus dabit tres differentes ſolutiones, ut in ſuperiore problemate.

PRO-

PROBLEMA XI.

55. Datis summà progressionis arithmeticæ, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum, invenire terminos singulos.

Sit factum $=a$: numerus terminorum $=n$: summa $=c$: terminus primus x, ultimus y.

Per n. 38. $\frac{1}{2}n\times\overline{x+y}=c$: per cond. probl. $xy=a$ &c.

DEFINITIO.

56. Numerus par est, qui bifariam, hoc est, per 2 dividi potest, ut 4, 12, 16.

Numerus impar est, qui bifariam dividi non potest, hoc est, qui unitate differt a pari, ut 3, 5, 7.

THEOREMA IV.

57. In serie arithmetica numerorum imparium 1 . 3 . 5 . 7 &c. summa totius progressionis est potestas secunda summæ numeri terminorum.

Dem. Sit terminus primus $1=a$: differentia $2=d$: numerus terminorum $=n$; dico $n^2=$ summæ totius progressionis. Nam per n. 33. ultimus terminus erit $a+\overline{n-1}\times d=a+nd-d$; & summa termini primi, & ultimi

mi $2a+nd-d$; & consequenter summa totius progressionis per n. 38. erit $\frac{1}{2}n\times\overline{2a+nd-d}$; hoc est, quia per hypothesim $a=1$, & $d=2$, fiet summa totius progressionis $n+n^2-n=n^2$. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

58. Numeri quadrati prodeunt continua numerorum imparium additione.

Numeri impares 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.
Numeri quadrati 1.4.9.16.25.36.49.64.81.100.

COROLLARIUM II.

59. Differentiæ numerorũ quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes.

PROBLEMA XII.

60. Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum hac lege, ut summa totius progressionis efficiat potentiam datam numeri dati.

Sit terminus primus progressionis $=1$: differentia terminorum in serie imparium $=2$: numerus datus $=n$: ejus potestas $=n^m$: numerus quæsitus terminorum, qui satisfaciat conditioni problematis, sit x. Itaque per n. 57. summa totius progressionis erit x^2; & per conditionem problematis $x^2=n^m$; adeoque $x=\sqrt[2]{n^m}$, vel, uti mox docebimus in calculo exponentiali, eadem radix $\sqrt[2]{n^m}$ ita exprimi potest $n^{\frac{m}{2}} = x$.

Corollarium.

61. Ex resolutione problematis $x = \sqrt[2]{n^m}$, vel $x = n^{\frac{m}{2}}$ constat problema non esse possibile, nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ita ut per 2 dividi possit.

Exemplum.

Sit itaque $m = 2$: erit $x^2 = n^m = n^2$, & $x = \sqrt[2]{n^2} = n^{\frac{2}{2}} = n$; hoc est, numerus quæsitus terminorum summandorum idem est cum radice quadrata datæ potestatis n^2. Si exponens $m = 4$, erit $x^2 = n^m = n^4$, & $x = \sqrt[2]{n^m} = n^{\frac{4}{2}} = n^2$; hoc est, numerus quæsitus terminorum summandorum est quadratus radicis n datæ potestatis n^4. Quare, si $n = 2$, $m = 4$, erit $x^2 = n^m = 2^4$; adeoque $x = \sqrt[2]{2^4} = 2^2 = 4$. Itaque numerus quæsitus terminorum erit 4: hinc $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = x^2 = 2^4$.

Problema XIII.

62. Invenire seriem arithmeticam numerorum imparium totidem numero, quot numerus datus habet unitates; & quorum summa conficiat potentiam datam ejusdem dati numeri.

Sit numerus datus $= n$: ejus potestas n^m: terminus primus progressionis x. Quoniam numerus terminorum per hypothesim est n, & in serie numerorum imparium differentia est 2; ultimus quæsitæ progressionis terminus erit $x + 2 \times \overline{n - 1} = x + 2n - 2$; & summa termini primi, & ultimi $2x + 2n - 2$, quæ ducta in $\frac{1}{2}n$ per n. 38., dat summam totius progressionis $nx + n^2 - n = n^m$ per cond. probl.; & dividendo utrinque per n, erit $x + n - 1 = \frac{n^m}{n} = n^{m-1}$; & subtrahendo utrinque $n - 1$, $x = n^{m-1} - n + 1$.

Monitum.

Quemadmodum si a^4 dividatur per a, evadit $a^3 = a^{4-1}$, & $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$ &c.; ita, si n^m dividatur per n, evadit $\frac{n^m}{n} = n^{m-1}$: quod in calculo exponentiali fusiùs erit explicandum.

Corollarium I.

63. Ex ultima æquatione constat problema in omni casu esse possibile.

Exem-

Exemplum.

64. Sit datæ poteſtatis exponens $m = 3$: erit $x = n^{3-1} - n + 1$; ſit porro $n = 2$: erit $x = 2^2 - 2 + 1 = 3$; adeoque $n^m = 2^3 = 8 = 3 + 5$ ſumma progreſſionis; ſit $n = 3$: erit $x = 7$; adeoque $n^m = 3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Corollarium II.

65. Hinc conſtat, quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Exemplum.

66. Sit datæ poteſtatis exponens $m = 4$: erit $x = n^{4-1} - n + 1$; ſit præterea $n = 2$: erit $x = 8 - 1 = 7$; adeoque $n^m = 2^4 = 7 + 9 = 16$; ſit $n = 3$: erit $x = 27 - 2 = 25$; adeoque $n^m = 3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Corollarium III.

67. Habes ſimiliter numeros quadrato-quadratos ex additione numerorum imparium procreatos.

Exem-

Exemplum.

68. Sit $m = 5$: erit $x = n^{5-1} - n + 1$; ſit præterea $n = 2$: erit $x = 16 - 1 = 15$; adeoque $n^m = 2^5 = 15 + 17 = 32$; ſit $n = 3$: erit $x = 81 - 2 = 79$, & $n^m = 3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

Corollarium IV.

69. Mira itaque facilitate intelligis, quomodo potentiæ cujuſcunque gradus ex additióne numerorum imparium procreentur.

CAPUT TERTIUM.

De ratione, & proportione geometrica.

Quintum Euclidis elementum, totamque rationum doctrinam, quam arithmeticam potius, quàm geometricam eſſe jure affirmat Walliſius, methodo analytica generatim, & universè tractandam aggredior. Cur autem lineis, quàm numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres, duplici de cauſa factum putat idem Walliſius, partim ſcilicet, quòd illi vix alios numeros, quàm integros admiſerint; nec enim materiam arithmeticam, ſicut geometricam in infinitum diviſibilem concipiebant, qui in unitate ſiſtendum putarent; adeoque non pariter numeris, atque lineis

lineis rationes omnes denotari posse perspexerant; & propterea doctrinæ alioqui universalis specimen saltem in lineis tradiderunt: partim, quia tum temporis, ut ipse putat, non modò methodus symbolica, sed ne figuræ quidem numerariæ, quæ jam passim usitatæ sunt, ab Indis inventæ, fuerant introductæ, ut nonnisi difficulter admodum numerorum praxim exercere valuerint.

Utut fuerint, nihil obstat, quin proportionis geometricæ doctrinam analyticè, adeoque simpliciùs, & universaliùs exponam. Qua in re, qui Tyronibus scribo, quædam in eorum gratiam censeo mihi esse præstanda.

I. In explicandis notionibus proportionum, earumque symbolis ero fortasse accuratior, quàm Scriptores reliqui solent esse. Hinc enim & artificii analytici fontes recluduntur, & multiplex ad demonstrandum via aperitur.

II. Interdum propositiones singulas aliter, atque aliter demonstro: quod minimè reprehendas velim, quasi verò in re non dubia, ut ait Tullius, utar testibus non necessariis. Erit enim hujus exercitationis fructus non mediocris assuescere Tyronis ingenium, ut unum, idemque problema, vel theorema pluribus verset modis, &, quæ inventionis pars est vel maxima, ingenii in omnem partem explorantis magnam sibi comparet sagacitatem.

Sy-

Synopsis.

Sicuti ratio geometrica ex quoto, ita æqualitas rationum ex æqualitate quotorum æstimatur. Exponens rationis quid, & quomodo differat ab exponentibus rationis. Prima partitio rationis in rationalem, & irrationalem. Proportionum rationalium multiplex species ab exponente rationis denominata; omnium tamen simplicior expressio a recentioribus adhibita. Æqualium rationum indicium, vel ab æqualitate exponentium, vel ab æqualitate numeri aliquotarum similium: hinc variæ rationum geometricarum expressiones litterales, quæ definitionum vices subeunt. Multiplicationis, & divisionis geometricæ specimen, & ratio superficierum, & corporum. Theoremata rationum æqualium, ex quibus pendent regulæ proportionum arithmeticæ, & argumentandi formulæ a Geometris adhibitæ. Theoremata rationum inæqualium ab antiquis usurpata. Inventio summæ continuè proportionalium.

Definitiones.

70. Rationem geometricam ex quoto æstimandam diximus Cap. I. n. *6.*, & 10.; adeoque ex horum æqualitate æqualitatem pariter rationum. Ubi enim quotientes invicem æquantur, ibi & quantitates sunt in eadem

eadem ratione conſtitutæ. Nam, quemadmodum ſubductione quærimus unius quantitatis ſupra alteram exceſſum, ſeu differentiam, ſic diviſione quærimus quotum unius quantitatis per alteram diviſæ; atque ab hoc quoto denominatur ratio geometrica; oſtendit enim, quomodo una duarum magnitudinum alteram contineat, vel in illa contineatur; puta, ſi quotus antecedentis per conſequens diviſi ſit 2, dicitur dupla: ſi 3, tripla: ſi $\frac{1}{2}$, ſubdupla: ſi $\frac{1}{3}$, ſubtripla; & univerſaliter ratio ipſius a ad b eſt, quæ denominatur ab $\frac{a}{b}$, hoc eſt a quotiente quantitatis a per b diviſæ.

Ratio geometrica quid, & æqualitas rationum.

71. Exponens rationis, qui etiam denominator dici ſolet, aut quotiens, eſt quantitas integra, vel fracta, modum definiens, quo antecedens rationis terminus conſequentem contineat, vel in illo contineatur. Sic numerus 3 dicitur exponens rationis, quam habet numerus 6 ad 2: ſimiliter $3\frac{6}{8}$ eſt exponens rationis numeri 30 ad 8.

Exponens rationis in quo differat ab exponẽtibus rationis.

72. At verò exponentes rationis ſunt minimi numeri, qui eamdem inter ſe rationem habent, quam antecedens ad conſequens. Nam, quemadmodum in fractionibus, ita & in rationibus deſignandis plerumque expedit, ut terminis, quantum fieri poteſt, minimis exponantur, quò meliùs earum valorem aſſequamur. Cave itaque confundas exponentem rationis cum exponentibus rationis. Ille eſt quotus diviſionis unius termini per alium. Sic exponens rationis 5 ad 3 eſt $1\frac{2}{3}$; exponens rationis 30 ad 8 eſt $3\frac{6}{8}$. At exponentes ejuſdem rationis 30 ad 8 ſunt minimi numeri 15, & 4. Inveniuntur autem exponentes rationis ea planè ratione, qua fractio reducitur ad minimos terminos non mutato ejuſdem valore. Nam, ſi uterque terminus 30, & 8 dividatur per maximam communem menſuram 2, quotientes 15, & 4 erunt exponentes rationis 30 ad 8; atque ita de reliquis.

Corollarium.

73. Exponens rationis eſt ad unitatem, ut antecedens ad conſequens. Conſtat ex definitione diviſionis. Quantitas namque dividenda toties continet diviſorem, quoties quotus diviſoris unitatem complectitur; vel quæ pars, vel partes unitatis eſt quotus, eadem pars, vel eædem partes diviſoris eſt quantitas ipſa dividenda. Cum autem exponens rationis ſit quotus ipſe, erit exponens ad unitatem, ut antecedens ad conſequens.

Sic $\frac{36}{12} = 3 = \frac{3}{1}$: ergo $3:1::36:12$;

vel $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; adeoque $1:3::12:36$;

ſive $\frac{1}{3}:1::12:36$.

74. Dividitur ratio, seu, ut alii dicere malunt, proportio in rationalem, & irrationalem. Rationalis dicitur, quæ potest veris numeris exhiberi, eamque inter se habere dicuntur magnitudines illæ, quibus datur communis mensura: irrationalis autem, quæ veris numeris exhiberi non potest, eamque habent magnitudines illæ, quæ sunt hujusmodi, ut nulla communis quantitas eas metiri possit. Quantitates autem incommensurabiles extare, perspicuum est ex Geometria. Sic in quadrato ratio lateris ad diagonium irrationalis est. Quamvis enim hujusmodi ratio utcunque explicari soleat per numeros, quos vocant surdos, puta, 1 ad $\sqrt{2}$; tamen, cum numerus surdus, propriè loquendo, numerus non sit, sed imaginarii cujusdam numeri nota, idcirco ratio illa veris numeris explicari non potest. Est nempe $\sqrt{2}$ nota numeri, qui in se ductus supponitur procreare numerum 2; cum autem nullus ejusmodi numerus possibilis sit, vel integer, vel fractus, erit $\sqrt{2}$ numeri tantùm suppositìtii, & imaginarii, non veri alicujus numeri nota.

Partitio rationis in rationalem, & irrationalem.

75. Exponens rationis denominat quamlibet proportionum rationalium speciem, quæ sua sortiuntur distincta nomina a græcis, latinisque Scriptoribus imposita, duriuscula quidem nonnulla, sed in vocabulis artis, inquit Wallisius, ferenda sunt; nam veterum Scriptorum linguam ignorare non debet is, cui in eorum scriptis tamquam solo, diu multùmque est habitandum.

Rationalis multiplex species.

Si exponens sit 1, dicitur ratio æqualitatis, seu ratio simpla: si exponens sit numerus major, vel minor unitate, dicitur ratio inæqualitatis; hæc autem duplex est, majoris nempe, & minoris inæqualitatis: si exponens unitatem superet, erit ratio majoris inæqualitatis: si ab unitate deficiat, minoris inæqualitatis: si exponens sit numerus integer, 2, 3, 4 &c., dicitur ratio multipla, vel dupla, tripla, quadrupla &c.: si sit numerus fractus, puta, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c., dicitur ratio submultipla, vel subdupla, subtripla &c.

76. Si exponens sit 1 cum aliquota parte, puta, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$ &c. dicitur superparticularis, ut sesquialtera, sesquitertia &c.; & his contrariæ præmissà syllabà *sub*, idest subsuperparticularis, subsesquialtera &c. Sin autem sit 1 cum pluribus partibus aliquotis, puta, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{5}$ &c., dicitur superpartiens, ut superbipartiens tertias, supertripartiens quartas; & his contrariæ præposita particulà *sub*.

77. Si exponens sit numerus integer unitate major cum annexa parte aliquota, dicitur multiplex superparticularis; puta, $2\frac{1}{2}$ dupla sesquialtera: $3\frac{1}{3}$ tripla sesquitertia: $3\frac{1}{4}$ tripla sesquiquarta &c.; & his contrariæ submultiplex superparticularis, subdupla sesquialtera &c. Quòd si

ſi numerus ſit integer cum pluribus partibus aliquotis, dicitur multiplex ſuperpartiens; puta, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$ &c., dupla ſuperbipartiens tertias, tripla ſupertripartiens quartas; & his contrariæ præpoſità particulà *ſub*. Sic ratio 31 ad 7 propter $\frac{31}{7}=4\frac{3}{7}$ eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas; & huic contraria ratio 7 ad 31 eſt ſubquadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

Scholion I.

78. HÆc proportionum vocabula, præſertim valde compoſita, obſoleta ferè jam ſunt apud recentiores, qui rationem quamlibet ſolent exprimere per ipſos terminos, quibus illa componitur, maluntque dicere circumferentiam circuli ad diametrum ſe habere in ratione 22 ad 7, aut 223 ad 71, quàm in ratione tripla ſeſquiſeptima, vel tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas. Interdum etiam proportionem exprimunt per exponentes rationis, ut dictum eſt n. 72., ideſt, per minimos numeros, qui eamdem inter ſe rationem habeant, quam antecedens ad conſequens.

Simplicior proportionū expreſſio.

Scholion II.

79. RAtiones, quas vocant irrationales, ſeu ineffabiles, quippe quæ non ſunt ut numerus ad numerum, ſed ut magnitudines inter ſe incommenſurabiles, peculiaria ab antiquis Scriptoribus nomina non ſunt adeptæ; ſed

ſed deſignari ſolent per ipſos terminos, aut alios in eadem ratione conſtitutos; puta, ut a ad b, vel ut 1 ad $\sqrt{2}$; aut per eoſdem ad formam fractionis poſitos, ut quotientem repræſentent antecedentis per conſequentem diviſi $\frac{a}{b}$, vel $\frac{1}{\sqrt{2}}$; hoc eſt, ratio ab $\frac{a}{b}$, vel $\frac{1}{\sqrt{2}}$ denominata.

Scholion III.

80. NE cui ſolæciſmum ſapere videatur λόγος ἄλογος ratio irrationalis, inquit Walliſius c. 19. Alg., notandum eſt hoc evenire propter ambiguam ſignificationem vocis λόγος, quæ & rationem ſignificat, & orationem, ſive proportionem, & ſermonem. Secundùm priorem ſignificationem dicitur λόγος ratio, ſeu proportio: ſecundùm poſteriorem ἄλογος rectiùs exponeretur ineffabilis, ſeu inexplicabilis, quàm irrationalis; eſtque λόγος ἄλογος proportio non explicabilis veris numeris, ſeu quæ non eſt, ut verus numerus ad verum numerum.

Scholion IV.

81. HÆc vox *exponens*, aut *quotiens* in ea latitudine uſurpanda eſt, ut deſignet id, quod ex magnitudinis cujuſvis per quamvis homogeneam diviſione oritur. Quamvis enim ratio, ſeu proportio, quæ irrationalis dicitur,

Rationis notio, quæ irrationalibus etiam conveniat.

dicitur, exprimi numeris non possit; puta, ratio 1 ad $\sqrt{2}$, quæ est ratio lateris ad diagonalem quadrati; tamen verissimè designari solet per ipsos terminos ejusdem ad formam fractionis positos $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ut quotientem repræsentent antecedentis per consequentem divisi; quemadmodum ita etiam exhibentur rationes, quæ numeris exprimi possunt, ut ratio dupla, tripla, quadrupla per $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ &c. In Geometria demonstratur, quòd exponens rationis datæ exprimi possit lineà, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus eumdem exhibere non valeamus.

SCHOLION V.

82. Est autem animadversione digna affinitas maxima, vel potius identitas fractionum, & rationum, quam luculenter explicat Wallisius Arith. c. 41. Arithmeticæ fractiones, & geometricæ rationes supponunt ambæ continuæ quantitatis divisionem, quæ non semper est in partes rationales, sed interdum etiam irrationales. Ut huic incommodo occurratur, ideam fractionum multò universaliorem tradit, quæ irrationalibus etiam conveniat. Cum enim ex. gr. fractio $\frac{2}{3}$ indicet unius integri in tres partes æquales secti partes duas, manifestum est hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eamdem habeat rationem, quam 2 ad 3. Docet itaque

fractione

fractione quavis tantum quantitatis homogeneæ designari, quantum ad unum integrum, sive datam quantitatem habeat eam rationem, quam habet fractionis numerator ad denominatorem; puta, si dicamus circuli radium esse $\frac{1}{2}$ diametri, tantundem est, ac si diceremus circuli radium eam esse diametri partem, quæ ad totam diametrum habeat rationem 1 ad 2; vel radium tantum esse, ut ad diametrum habeat rationem 1 ad 2. Ita cum latus quadrati esse dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ diagonalis, perinde est, ac si diceremus latus quadrati tantum esse, ut ad illius diagonalem habeat rationem 1 ad $\sqrt{2}$. Item quadrati ambitum esse $\frac{4}{\sqrt{2}}$ diagonalis, perinde est, ac si diceremus ambitum quadrati tantum esse, ut ad ipsius diagonalem habeat rationem 4 ad $\sqrt{2}$. Qua universaliori notione satis commodè exponuntur fractiones illæ irrationales, licet juxta communem methodum fractionum dici non possit, vel 1, vel 4 diagonia in $\sqrt{2}$ æquales partes dividi, quò earum una assumatur. Atque eodem modo sumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis a, b, fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b}z$ significat, quòd ad unum integrum, vel aliam quantitatem z fractio proposita habeat eam rationem, quam habet a ad b, sive ea sit irrationalis, sive rationalis. Habes itaque unà

eàdem-

eàdemque operà tum fractionem, tum divisionis quotientem, tum rationis exponentem, sive denominatorem designari.

Hæc fusiùs exposui, ne in prima rationis notione, quam n. 70. ex quoto unicè æstimandam diximus, vel hærerent Tyrones, vel solis quantitatibus commensurabilibus eamdem congruere per errorem arbitrarentur.

83. DUæ rationes a ad b, & c ad d dicuntur similes, æquales, eædem, quando antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant exponentes æquales; & vicissim, si exponentes sint æquales, magnitudines erunt proportionales, ideit, ratio rationi erit eadem, æqualis, similis. Cum enim duarum quantitatum habitudo, quæ ratio, seu proportio dicitur, ab exponente, seu quotiente determinata sit n. 70. 71., æqualitas ipsa exponentium erit æqualitas, seu similitudo duarum rationum. Quare, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erunt quantitates illæ proportionales; & solent etiam sic designari $a:b=c:d$, sive $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: quo signo æqualitatis $=$ exprimitur æqualitas ipse exponentium, seu rationum.

Æqualium rationũ indicium ab æqualitate exponentiũ.

Rationes autem inæquales, seu dissimiles sunt, quarum antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant exponentes inæquales; & illa ratio major est, cujus exponens major. Inæqualitas rationum iisdem planè signis notatur, quibus inæqualitas magnitudinum. Sic $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, sive $a.b>c.d$ significat rationem a ad b majorem ratione c ad d, hoc est, exponentem primæ rationis majorem exponente secundæ rationis.

SCHOLION I.

84. ATque hanc exponentium æqualitatem pro definitione proportionalium assumere licet cum Ovgtredo, Wallisio, Wolfio, aliisque principibus Geometris, loco illius, quam tradit Euclides def. 6. lib. 5. per affectionem veram illam quidem, sed abstractam, & subobscuram, quò posset ad omnes rationes etiam irrationales extendi. Ille tamen def. 10. lib. 7. numeros proportionales, quibus ratio effabilis, seu rationalis competit, aliter definivit. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes: quam definitionem ut corruptam, indeque mancam sic supplet Clavius: vel certè cum primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eamdemque insuper illius partem, vel partes. At verò proportionalium definitio per æqualitatem exponentium, & ipsa per se perspicua est, & universalis. Neque enim ulla est quantitatum commensurabilium ratio, quæ non possit per numeros certos; neque sane incommensurabilium ulla, quæ non possit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certissimè expri-

exprimi, uti paulo infra declarabitur. Hinc duarum quantitatum ratio, sive ea rationalis sit, sive irrationalis, & præterea duarum rationum similitudo rectè exprimitur, illa per quotum, hæc per æqualitatem quotorum. Quin immo mirari satis non possum, cur plerique, qui elementa geometrica tradiderunt, facillimum hoc æqualium rationum indicium, ad totam proportionum doctrinam breviter explicandam multò commodius minimè usurpaverint.

SCHOLION II.

85. CAvendum, ne rationum æqualitas cum ratione æqualitatis confundatur. Hæc postulat, ut termini sint æquales: illa, ut termini antecedentes eodem modo suos consequentes respiciant.

SCHOLION III.

Vel ab æqualitate numeri aliquotarũ similium.

86. AD eamdem exponentium æqualitatem reducitur proportionalium definitio ab Analystis afferri solita; quæque in calculo analytico magnum habet usum, uti mox constabit. Duæ rationes a ad b, & c ad d dicuntur æquales, similes, quando & consequentes, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali semper numero continentur.

Inæquales rationes sunt, quando aut consequentes,

sequentes, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur; & illa ratio major est, cujus vel consequens, vel consequentis aliquota sæpius continetur in antecedente. Hæc definitio paulo infra exemplis illustrabitur.

COROLLARIUM I.

87. IN calculo litterali omnium optima, & ad demonstrandum aptissima est ea denominandi ratio, qua fit, ut expressiones litterales definitionum vices subeant, & rerum repræsentatarum relationes exprimant. Hac de causa, ut Tyronibus consulam, exponam varia, quibus Analystæ utuntur, symbola ex n. 83, 84, 86 deducta, quorum ope rationem ipsam, & rationum æqualitatem designare solent.

Rationis geometricæ prima expressio litteralis.

88. PRima expressio rationis satis obvia est ad instar fractionis $\frac{a}{b}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{5}, \frac{36}{12}, \frac{12}{36}$ &c. Cum enim rationum denominatores, sive exponentes nil aliud sint, quàm divisionum quotientes; divisiones autem indicari soleant interjectà lineolà dividuum inter, & divisorem, idque necessariò, ubi numerus dividendus est dividente minor, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$; atque etiam interdum aliis de causis non raró commodius evadat; quidni & rationes ita designentur? fractiones enim, ut dictum est, sunt ipsi rationum

num exponentes: quare fractionis numerator, & denominator perinde sunt atque rationis antecedens, & consequens.

89. Sin autem quotus ipse, vel fractio sit, vel etiamsi sit numerus integer, exprimatur ad instar fractionis, numerator hujus fractionis erit ad suum denominatorem, ut numerus dividendus ad divisorem, hoc est, ut antecedens ad consequens.

Sic $36:12=\frac{36}{12}=3=\frac{3}{1}$:

erit ergo $3:1::36:12$;

Vel $12:36=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$:

hinc erit $1:3::12:36$.

Sic $60:28=\frac{60}{28}=2+\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$;

atque adeo $15:7::60:28$;

Vel $28:60=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}$:

hinc $7:15::28:60$.

Sic $32:24=\frac{32}{24}=1+\frac{8}{24}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$:

ergo $4:3::32:24$.

Corollarium II.

Secunda expressio.

90. Altera rationis expressio ab eodem fonte derivata est. Itaque, si exponens rationis duorum terminorum sit quotus ex divisione antecedentis per consequentem, terminus

nus major æqualis erit minori per exponentem multiplicato: terminus minor æqualis erit majori per exponentem diviso. Nam in omni divisione divisor ductus in quotientem æquatur dividendo; & præterea dividendus divisus per quotientem æquatur divisori.

Quare, si termini rationis datæ sint a, & b, & terminus minor sit a, exponens m erit major $b=am$: hinc loco ipsius b substitui poterit am; & rursum terminus minor $a=\frac{b}{m}$; & loco ipsius a substitui poterit $\frac{b}{m}$. Itaque valores isti analytici $a:b$, vel $a:am$, vel $\frac{b}{m}:b$ eamdem prorsus exprimunt rationem minoris inæqualitatis a ad b.

Sin verò terminus major dicatur a, exponens m, erit major $a=bm$, & minor $b=\frac{a}{m}$. Quare substitutis hisce valoribus loco ipsius a, vel b, expressiones istæ $a:b$, vel $bm:b$, vel $a:\frac{a}{m}$ designabunt eamdem rationem majoris inæqualitatis a ad b.

Denique, si exponens m explicetur vel per numerum integrum, vel per fractum $a:ma$, rationem quamcumque designabit.

COROLLARIUM III.

91. Hinc datis quatuor terminis proportionalibus $a:b::c:d$ multò simpliciùs, & commodiùs per exponentem communem æqualitas duarum rationum notatur $a:am=c:cm$.

COROLLARIUM IV.

92. Quin immo datis quibusvis terminis proportionis geometricæ continuæ a, b, c, d, e &c., erit simplicior expressio cujuslibet termini per exponentem communem a, ma, m^2a, m^3a &c.

COROLLARIUM V.

Tertia expressio.

93. Est etiam tertius modus, quo analyticè exprimitur ratio duarum quantitatum, atque etiam æqualitas rationum. Hæc interdum per aliquotas similes designari solet, uti exposui n. 86.; usumque habet amplissimum, & universalem in exprimenda ratione quantitatum nedum commensurabilium, verùm etiam incommensurabilium. Est autem ejusmodi.

Quantitas quæcunque concipi potest divisa in quemlibet quantumvis magnum, uti libuerit, partium æqualium numerum, quas voco aliquotas. Sit itaque exprimenda ratio $a:b$: designet n numerum aliquotarum x, quas a continet,

continet, & pariter m numerum earumdem aliquotarum x, quas b continet: erit $a=nx$, & $b=mx$; atque adeo $a:b=nx:mx$. Sint pariter aliæ duæ quantitates c, & d, quarum aliquota communis y; & idem n designet numerum aliquotarum y, quas c continet; & pariter m designet numerum alterum aliquotarum y, quas d continet: erit $c=ny$, & $d=my$; atque inde $c:d=ny:my$.

His positis, duarum rationum æqualitas $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ita exprimi poterit $\frac{nx}{mx}=\frac{ny}{my}$. Utriusque verò rationis idem est exponens $\frac{n}{m}$; puta $\frac{5\ pedes}{3\ pedes} = \frac{5\ exapedis}{3\ exapedis}$: in qua expressione $n=5$, $m=3$, $x=$ pedi, $y=$ exapedæ. Aliquotæ verò x, & y dicentur similes, cum sua tota æqualiter metiantur.

Si $m=n$, ratio $\frac{nx}{mx}=\frac{ny}{my}=\frac{1}{1}$ erit ratio æqualitatis.

COROLLARIUM VI.

94. Si in ratione $\frac{a}{b}=\frac{nx}{mx}$ numerus quilibet n, & m sit finitus, & determinatus, hæc ratio $\frac{nx}{mx}$ dicetur commensurabilis: sin verò duæ quantitates a, & b ita sint comparatæ, ut, etiamsi quantitas b concipiatur divisa in quemlibet

libet numerum m aliquotarum x, finitum tamen, & determinatum, fieri nunquam poſſit, ut quantitas alia a contineat exactè numerum pariter finitum quemcunque n aliquotarum x, quin aliquod ſemper reſiduum ſuperſit: duæ quantitates a, & b dicentur incommenſurabiles. Cum verò reſiduum in infinitum decreſcat aucto in infinitum aliquotarum numero, denique evaneſcet, ſi conſequens b concipiatur diviſum in numerum infinitum partium æqualium x. Quo fit, ut antecedens a contineat numerum pariter infinitum earundem aliquotarum x.

COROLLARIUM VII.

95. Itaque $\frac{a}{b}=\frac{nx}{mx}=\frac{c}{d}=\frac{ny}{my}$ erit expreſſio generalis duarum rationum æqualium adhibitis aliquotis x, & y ſimilibus. Si duæ rationes ſint commenſurabiles, n, & m deſignant numerum finitum: ſin verò incommenſurabiles, n, & m deſignant numerum infinitum.

COROLLARIUM VIII.

96. Duæ rationes $\frac{e}{f}$, & $\frac{g}{h}$ ſunt inæquales, quando antecedentes termini e, & g non continent eumdem aliquotarum x, & y ſimilium numerum ſuorum conſequentium f, & h; vel quando conſequentes termini non continent eum-

eumdem aliquotarum ſimilium numerum ſuorum antecedentium e, & g. Itaque $\frac{mx}{nx}$, & $\frac{py}{ny}$; vel $\frac{mx}{nx}$, & $\frac{my}{qy}$ erit expreſſio generalis duarum rationum inæqualium.

SCHOLION.

97. Asſueſcant Tyrones hiſce variarum expreſſionum ſymbolis, quibus paſſim utuntur Analyſtæ tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ causà. Notarum delectus viam in demonſtrando multò breviorem reddit. Ipſæ nimirum analyticæ expreſſiones, ſi quoti, ſeu exponentes reducantur per regulas fractionum, oculis veluti ſubjiciunt proportionum ſymptomata omnia, quæ elem. 5. Eucl. continentur; quæque, quoad potero, clariſſimè exponam.

THEOREMA I.

98. Si numerus n duos numeros a, & b multiplicet, aut dividat, hinc facta na, nb, inde quoti $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ erunt terminis multiplicatis, aut diviſis in eadem proportione.

Demonſtratur. Nam $\frac{na}{nb}=\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$. Itaque per n. 87. $na:nb::a:b::\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$.

Ali-

Aliter.

Sit exponens m, & a minor, & b major $= am$ per n. 90.: ergo $\frac{a}{ma} = \frac{an}{man} = \frac{a:n}{ma:n} = \frac{1}{m}$.

S C H O L I O N.

REductis fractionibus æqualitas quotientum apparet, & consequenter rationum similitudo per n. 83.

C O R O L L A R I U M.

99. IDem intellige, si duæ magnitudines in communem magnitudinem ducantur, aut ad communem magnitudinem, ut dici solet, applicentur. Quamvis enim magnitudinis in magnitudinem ductus, aut ad magnitudinem applicatio non idem planè sit cum propriè dicta multiplicatione, aut divisione per numerum, idem tamen hac in re præstare, sub initium hujus operis alibi demonstratum est ex Newtono, ubi de multiplicatione, & divisione arithmetica, & geometrica. Atque hinc per calculum litteralem facillimè invenitur ratio superficierum, & corporum, quæ in elementari Geometria demonstratur: cujus rei specimen aliquod hìc subdo.

Geometrica multiplicatio, aut divisio.

100.

100. PArallelogramma, & triangula æque alta basium rationem habent. Sit enim eorum communis altitudo n, bases A, & B: ergo illorum areæ erunt nA, nB, & horum $\frac{1}{2}nA$, & $\frac{1}{2}nB$ ex elementis: ergo per Theor. I. $nA:nB::\frac{1}{2}nA:\frac{1}{2}nB::A:B$.

Ratio superficierũ.

101. PAriter si eadem plana nA, nB adsciscant sibi etiam communem crassitiem m, atque etiam commune pondus p, retinebunt adhuc eamdem rationem, quæ est ipsius A ad B, nempe $A:B::nA:nB::mnA:mnB::mnpA:mnpB$.

Et corporum.

102. PArallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides, coni ejusdem altitudinis habent rationem basium, &, si ejusdem, vel æqualis sint basis, habent rationem altitudinum. Sint horum bases A, B, altitudo communis n: erunt corpora ista ex elementis, uti nA ad nB: ergo per n. 98. ut A ad B. Eodem modo n assumi potest pro basi communi, ita ut A & B sint altitudines; similique methodo alia hujus generis theoremata investigantur.

T H E O R E M A II.

103. SI fuerint quatuor magnitudines geometricè proportionales, factum extremarum æquatur facto mediarum.

De-

Demonstr. Quippe si $a:b::c:d$, erit per n. 83. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; & utrinque æqualia multiplicando per bd, erit $ad=cb$. Quod erat &c.

Vel ex n. 90. per exponentem. Si $a:ma::b:mb$: ergo $amb=mab$; hoc est, factum extremarum continet easdem quantitates, ac factum mediarum.

Vel ex n. 93. per aliquotas similes. Si $nx:mx::ny:my$: ergo $nxmy=mxny$.

SCHOLION.

EXpressiones analyticas proportionis geometricæ modò has modò illas sequar inter demonstrandum, eo consilio, ut Tyronibus assuetudine quadam familiares sint.

COROLLARIUM I.

104. HInc datis tribus quibusvis terminis proportionis geometricæ, datur vel quartus, vel tertius, vel secundus, vel primus. Sit enim $a:b::c:x$: ergo per n. 103. $ax=bc$; & dividendo, $x=\frac{bc}{a}$. Rursum sit $a:b::x:c$: ergo $ac=bx$ &c.

COROLLARIUM II.

105. HInc illa, quæ vulgò dici solet regula aurea, seu regula proportionum: nimirum,

mirum, quatuor proportionalium datis tribus, invenire quartum. De hac fusè egimus in Arithmetica.

MONITUM.

UT brevitati consulam in iis, quæ consequuntur theorematis, ferè semper supponam rationem majoris inæqualitatis; nam hinc facilè constabit domonstratio pro casu minoris inæqualitatis.

THEOREMA III.

106. SI fuerint tres magnitudines continuò geometricè proportionales, productum extremarum erit æquale quadrato mediæ.

Consequitur ex præced. Th. Nam, si $::a.b.c$, hoc est, si $a:b::b:c$: erit per n. 83., & 87. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Multiplicetur utrinque per bc: fiet $ac=bb$.

Aliter ex n. 90. Sit exponens d: ergo proportio continua $a:b::b:c$ in hanc transformatur $bd:b::cd:c$; & consequenter $bd\times c=b\times cd$; substitutisque valoribus $a=bd$ in prima ratione, & $cd=b$ in secunda ratione, fiet $a\times c=b\times b$. Quod erat &c.

THEOREMA IV.

107. SI fuerint quatuor magnitudines, ex quibus productum extremarum sit æquale producto mediarum, illæ erunt geometricè proportionales.

Cum enim sit $ad = bc$, erit æqualiter, utrinque per bd dividendo, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$; hoc est $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & $a:b::c:d$.

Aliter. Si $ad = bc$, dico esse $a:b = c:d$. Esto $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$; adeoque $bm = a$, & $dn = c$. Multiplicetur utrinque æquatio $bm = a$ per eamdem quantitatem d, & æquatio $dn = c$ similiter per eamdem quantitatem b: erit $bmd = ad$, & $dnb = bc$. Est autem per hypothesim $ad = bc$: ergo $bmd = dnb$; ac proinde $\frac{bmd}{bd} = \frac{dnb}{bd}$; & per reductionem $m = n$; hoc est, exponens rationes $\frac{a}{b}$ æquabitur exponenti rationis $\frac{c}{d}$: ergo $a:b::c:d$. Quod erat &c.

THEOREMA V.

108. SI fuerint tres magnitudines, ex quibus productum extremarum sit æquale quadrato mediæ, erunt illæ continuò inter se geometricè proportionales.

Demonstratio

Demonstratio consequitur ex præced. Nam, si $ac = bb$, ergo per n. 107. $a:b::b:c$; ac proinde $::a.b.c$. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

109. DAtis duobus productis æqualibus $ac = bd$, si factores duo a & c producti primi accipiantur vel pro extremis, vel pro mediis; & rursum factores duo b & d sumantur vel pro mediis, vel pro extremis, quatuor illæ magnitudines semper erunt proportionales. Quare $a:b::d:c$, vel $b:a::c:d$, vel $b:c::a:d$ &c. Demonstr. ex n. 107.

COROLLARIUM II.

110. SI $bb = ac$, & radix b sumatur vel pro media alicujus proportionis, vel pro extremis; & factores duo a & c vel pro mediis, vel pro extremis, tres illæ magnitudines erunt continuò proportionales. Sic $a.b::b.c$, vel $b.a::c.b$, vel $b.c::a.b$ &c. Dem. ex n. 107., & 108.

COROLLARIUM III.

111. HInc æquationem quamlibet in analogiam resolvendi methodus derivatur, quæ usum habet amplissimum in Analysi, ac præsertim in constructione geometrica, de qua alibi erit dicendum.

 DE-

DEFINITIO.

112. DUo producta æqualia ac, bd vocantur plana reciproca: quippe primus factor primi est ad primum secundi reciprocè, ut secundus secundi ad secundum primi.

PROBLEMA I.

Regula proportionum directa. 113. DAtis tribus magnitudinibus, quartam directè proportionalem invenire. Patet ex n. 104.

PROBLEMA II.

114. DAtis tribus magnitudinibus a, b, c, quartam x reciprocè proportionalem invenire.

Inversa. Voco autem reciprocè proportionalem x, quæ sit ad secundam b, ut est prima a ad tertiam.

Demonstratio, & resolutio pendet ex n. 103. Nam proportio reciproca quatuor magnitudinum a, b, c, x convertatur in directam $a:c::x:b$; ac proinde $ab = cx$; & $\frac{ab}{c} = x$. Quare factum ab ex ductu primæ in secundam dividatur per tertiam: quotus $\frac{ab}{c}$ erit quarta reciprocè proportionalis.

Hinc regula trium inversa, quæ in eo consistit, ut, datis tribus, quarta inveniatur, quæ ita se habeat ad secundam, uti prima ad tertiam.

PROBLEMA III.

115. DAtis duabus quantitatibus a, & b, mediam geometricè proportionalem invenire.

Resolutio, ejusque demonstratio elicitur ex n. 106. Ab extremorum facto ab extrahatur radix quadrata: $\sqrt{ab}$ est media quæsita. Nam, si fiat $\sqrt{ab} = x$, ergo $ab = xx$; adeoque per n. 106. $::a.x.b$.

PROBLEMA IV.

116. DAtis duabus quantitatibus a, & b, tertiam geometricè proportionalem invenire.

Resolutio. Quotus $\frac{bb}{a}$ erit tertia proportionalis quæsita. Ponatur enim $\frac{bb}{a} = d$: ergo $bb = ad$: hinc per n. 108. $::a.b.d$.

THEOREMA VI.

117. SI fuerint quatuor magnitudines a, b, c, d, quarum prima ad secundam habeat majorem rationem, quam tertia ad quartam, nimirum $a:b > c:d$; productum ad extremarum majus erit producto mediarum bc.

Sin autem ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, hoc eſt, $a:b < c:d$; productum extremarum ad minus erit producto mediarum bc.

Demonſt. prima pars. Quoniam eſt $a:b > c:d$, exponens rationis $\frac{a}{b}$ major erit exponente rationis $\frac{c}{d}$ ex n. 83. Ponatur ergo $\frac{a}{b} = m + n$, & $\frac{c}{d} = m$: ergo $bm + bn = a$, & $dm = c$. Multiplicatis itaque membris æquationis $bm + bn = a$ per eamdem quantitatem d, ſicuti etiam membris æquationis $dm = c$ per quantitatem b, erit $bmd + bnd = ad$, & $dmb = cb$. Eſt autem $bmd + bnd > dmb$: ergo $ad > cb$. Quod erat &c.

Demonſt. ſecunda pars. Quia $a:b < c:d$, erit $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = m + n$: hinc $dm + dn = c$, & $bm = a$; ac proinde multiplicatis membris primæ æquationis per b, & membris ſecundæ per d, invenietur $ad < bc$, cum ſit $bmd < dmb + dnb$. Quod erat &c.

THEOREMA VII.

118. SI fuerint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus productum extremarum ad ſit majus producto mediarum bc; prima habebit majorem rationem ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, nimirum $a.b > c.d$. Sin

autem productum extremarum fuerit minus producto mediarum, ratio primæ ad ſecundam erit minor ratione tertiæ ad quartam, hoc eſt, $a.b < c.d$.

Dem. prima pars. Ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$; atque adeo $bm = a$, & $dn = c$. Multiplicatis ergo membris primæ æquationis per d, & membris ſecundæ per b, fiet $bmd = ad$, & $dnb = cb$. Eſt autem per hypotheſim $ad > bc$: ergo $bmd > dnb$; & utrinque dividendo per bd, erit $m > n$: hinc per n. 83. $a.b > c.d$. Quod erat &c.

Dem. ſecunda pars. Sit $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$: erit $bmd = ad$, & $dnb = cb$; ſed $ad < cb$; ac proinde $bmd < dnb$; & dividendo utrinque per bd, erit $m < n$: hinc $a.b < c.d$. Quod erat &c.

THEOREMA VIII.

119. IN omni proportione geometrica $a.b :: c.d$, quocunque modo diſponantur termini, ſemper habebitur proportio, dummodo duo media maneant media, aut ambo evadant extrema, vel duo extrema perſeverent extrema, aut ambo evadant media.

Ratio eſt, quia factum extremorum ſemper æquabitur facto mediorum: hinc per n. 107. magnitudines illæ erunt geometricè proportionales.

 Quod

Quod ut evidentiùs constet, animadvertendum est, quatuor illos terminos juxta conditionem a theoremate præscriptam, nonnisi octo permutationes ferre posse, & in harum qualibet, extrema semper æquari mediis.

$a.b::c.d$	$ad=bc$
$d.b::c.a$	$da=bc$
$a.c::b.d$	$ad=cb$
$d.c::b.a$	$da=cb$
$b.a::d.c$	$bc=ad$
$b.d::a.c$	$bc=da$
$c.a::d.b$	$cb=ad$
$c.d::a.b$	$cb=da$

COROLLARIUM.

Argumentandi formulæ.

120. EX hisce terminorum proportionalium permutationibus proficiscuntur varii argumentandi modi a Geometris adhibiti, quos tamen in gratiam Tyronum separatim tractare aggrediar propter usum amplissimum, quem in Analysi obtinent.

THEOREMA IX.

Alternando.

121. SI quatuor quantitates proportionales sint $a:b::c:d$, sunt & alternè proportionales $a:c::b:d$.

Demonst. ex n. 107., & 119. Nam etiam alternando, erit semper $ad=bc$.

Aliter. Ex n. 90. data analogia $a:b::c:d$, cujus communis exponens est m, in hanc transformari potest: $mb:b::md:d$; ac proinde $mb:md::b:d$ per Theor. I.

Aliter. Ex n. 93. $\frac{a}{b}=\frac{mx}{nx}$, & $\frac{c}{d}=\frac{my}{ny}$: ergo $\frac{a}{c}=\frac{mx}{my}$, & $\frac{b}{d}=\frac{nx}{ny}$; atqui $\frac{mx}{my}=\frac{x}{y}$, & $\frac{nx}{ny}=\frac{x}{y}$; ac proinde $\frac{mx}{my}=\frac{nx}{ny}$, hoc est, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

COROLLARIUM.

122. HInc partes similes a & b duarum quantitatum A & B sunt directè inter se, ut ipsæ quantitates A & B; Cum enim per hypothesim $a:A=b:B$, erit alternando $a:b=A:B$.

SCHOLION.

123. HÆc argumentatio ita definitur ab Euclide lib. 5. def. 12: alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Opportunè autem notat Wallisius vol. 1. cap. 35. prop. 16. hanc argumentationem solummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates sunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea; puta, si sit, ut pondus A ad pondus a, sic linea B ad lineam b, non tamen erit dicendum: ergo alternando, ut pondus A ad lineam B, sic pondus a ad lineam

neam b; quia ponderis ad lineam nulla eſt ratio, quippe quæ inter homogeneas quantitates ſolas conſiſtit.

Si quando tamen alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur, monet idem Walliſius, poſſe utramque rationem aliis exponi terminis invicem homogeneis, in quibus alternatione inſtituta, aliiſque, ut opus fuerit, operationibus peractis, nova alternatione reſtituendi ſunt in priſtinum ordinem termini mutuati; & deinde deponendi, reſumptis a principio poſitis, ut n. 137. declarabitur ex eodem Walliſio.

THEOREMA X.

124. SI quatuor quantitatum prima a ad ſecundam b majorem habeat rationem, quàm tertia c ad quartam d, erit alternando ratio primæ ad tertiam major ratione ſecundæ ad quartam.

Demonſ. Quia ponitur $a.b > c.d$, erit per n. 117. $ad > bc$: itaque per n. 118. erit alternando $a.c > b.d$. Sin autem $a.b < c.d$, demonſtratur eodem modo fore alternando $a.c < b.d$.

Aliter. Nam, ſi $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, eſto $\frac{a}{b+e} = \frac{c}{d}$: ergo alternando per n. 121. $\frac{a}{c} = \frac{b+e}{d} > \frac{b}{d}$; adeoque $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

THEO-

THEOREMA XI.

125. SI quatuor quantitates proportionales fuerint $a.b = c.d$, etiam invertendo proportionales erunt $b.a = d.c$. Invertendo.

Demonſ. ex n. 107., & 119. Nam ſive ad ſint extremæ, & bc mediæ; ſive hæ extremæ, & illæ mediæ, erit utroque modo $ad = bc$; adeoque utrobique porportionalitas.

Aliter. Quia ponitur $mb.b = md.d$, erit etiam $b.mb = d.md$, cujus exponens communis eſt $\frac{1}{m}$.

Vel fiat $\frac{mx}{nx} = \frac{my}{ny}$; ergo $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my} = \frac{n}{m}$.

SCHOLION.

HÆc argumentatio ita definitur ab Euclide lib. 5. def. 13. juxta Clavium: inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, tamquam antecedentis ad antecedentem velut ad conſequentem.

THEOREMA XII.

126. SI quatuor quantitatum prima a ad ſecundam b majorem habuerit rationem, quàm tertia c ad quartam d, facta inverſione habebit ſecunda ad primam minorem rationem, quàm quarta ad tertiam.

Pro-

Propositio per se patet; nam, quò major est ratio quævis, eò minor est ipsius conversa.

Demonstratur tamen. Quoniam $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, esto $\frac{a}{b+e} = \frac{c}{d}$; & invertendo $\frac{d}{c} = \frac{b+e}{a} > \frac{b}{a}$.

Vel: quia $a.b > c.d$; erit ex n. 117. $ad > bc$; & ex n. 119. $b.a < d.c$.

THEOREMA XIII.

Dividendo. 127. SI quantitates compositæ proportionales sint, erunt & divisæ proportionales.

Demonst. Esto $a+b:b = c+d:d$: dico fore $a:b = c:d$. Perspicuum est enim tum quantitem $a+b$ una vice pluries continere quantitatem b, quàm eamdem contineat sola quantitas a; & similiter $c+d$ una vice pluries, quàm c continere d; & propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas.

Vel clariùs sic: quia $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$, & $\frac{c+d}{d} = \frac{c}{d} + 1$, si per hypothesim sit $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, erit etiam $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$; & detracta utrinque unitate $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, hoc est, $a.b :: c.d$. Quod erat &c.

Vel aliter sic: ponatur $a.b = c.d$: erit $a-b.b = c-d.d$; nam, quia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, hoc est, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Vel per n. 103.: quia ponitur $a+b:b = c+d:d$, multiplicatis extremis, & mediis, erit $ad+bd = bc+bd$; adeoque $ad = bc$; ac proinde per n. 107. $a:b = c:d$. Quod erat &c.

SCHOLION.

128. HÆc argumentatio ita definitur ab Euclide lib. 5. def. 15.: divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.

COROLLARIUM I.

P. Clavius, aliique Geometræ duas alias hìc adjungere solent divisionis rationis formas. Primam vocant divisionem rationis conversam, quando consequens refertur ad excessum, quo consequentem superat antecedens: sic $a:b :: c:d$, erit $b:a-b :: d:c-d$. Quæ argumentatio non alia est, quàm Theor. XIII. inversio; nam per hoc erit $a-b:b :: c-d:d$; & invertendo $b:a-b :: d:c-d$.

Alteram vocant divisionem rationis contrariam, quando confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat: sic $a:b :: c:d$, erit $a:b-a :: c:d-c$. Quæ argumentatio continet divisionem rationis, duasque

que inversiones; nam primò invertendo erit $b : a :: d : c$; tum dividendo $b - a : a :: d - c : c$; rursumque invertendo $a : b - a :: c : d - c$.

THEOREMA XIV.

129. SI composita prima cum secunda ad secundam habeat majorem rationem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam, habebit quoque dividendo prima ad secundam majorem rationem, quàm tertia ad quartam.

Dem. Nam, si $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$, hoc est, $\frac{a}{b} + 1 > \frac{c}{d} + 1$, erit quoque $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Quod erat &c.

Vel sic: si $a . b > c . d$, erit per n. 117. $ad > bc$; ac proinde $ad - bd > bc - bd$, hoc est, $\overline{a-b} \times d > \overline{c-d} \times b$: ergo per n. 118. $a - b . b > c - d . d$. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

SI $a . b < c . d$, erit similiter dividendo $a - b . b < c - d . d$. Ostenditur eodem modo.

THEOREMA XV.

Componendo. 130. SI quatuor quantitates proportionales fuerint $a . b = c . d$, etiam compositæ proportionales erunt $a + b . b = c + d . d$.

Dem. Cum enim sit $a . b = c . d$, erit $ad = bc$; ac propterea etiam $ad + bd = bc + bd$, hoc est, $\overline{a+b} \times d$ productum extremarum $= \overline{c+d} \times b$ producto mediarum: ergo per n. 107. $a + b . b = c + d . d$. Quod erat &c.

Aliter sic: nam cum sit per hypothesim $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, hoc est, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; adeoque $a + b . b :: c + d . d$. Immo verò pristinæ æquationi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ addendo utrobique, vel subtrahendo numerum quemvis m, erit etiam $\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$, sive $\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d}$. Qua expressione generatim demonstratur & divisio, & compositio rationis.

Vel etiam sic: quia $mb . b :: md . d$, erit etiam $mb \pm b . b :: md \pm d . d$; nam utriusque rationis idem est exponens $m \pm 1$.

SCHOLION.

HIc argumentandi modus ita definitur ab Euclide lib. 5. def. 14.: compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsum consequentem.

Corollarium I.

131. Hic etiam Clavius duas alias rationis compositiones adjungit. Primam appellat compositionem rationis conversam, quando sumitur terminus antecedens, & consequens veluti unicus, qui cum antecedente conferatur; puta, si $a.b::c.d$, erit $a+b.a::c+d.c$; nam invertendo erit $b.a::d.c$; & componendo $a+b.a::c+d.c$, sive $a+b.b::c+d.d$.

Vel: si $a.b::c.d$, erit $ad=bc$; & proinde $ac+ad=ac+bc$; hoc est, $\overline{a+b}\times c$ productum extremorum $=\overline{c+d}\times a$ producto mediorum; adeoque $a+b.a::c+d.c$.

Vel: si $mb.b::md.d$, erit $mb+b.mb::md+d.md$, tum quia productum extremorum æquabitur producto mediorum; tum quia utriusque rationis idem est exponens.

Corollarium II.

132. Alteram vocat Clavius compositionem rationis contrariam, quando, inquit, refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem velut ad unam; puta, si $a.b::c.d$, erit $a.a+b::c.c+d$. Nam priorem analogiam invertendo, & componendo, iterumque invertendo, prodibit compositio rationis contraria.

THEO-

Theorema XVI.

133. Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad secundam, quàm tertia ad quartam, etiam componendo prima cum secunda majorem rationem habebit ad secundam, quàm tertia simul cum quarta ad quartam.

Dem. Cum sit $a.b > c.d$, erit $ad > bc$; adeoque $ad+bd > bc+bd$; est autem $ad+bd$ productum extremarum $a+b$, d, & $bc+bd$ productum mediarum b, & $c+d$: ergo $a+b.b > c+d.d$. Quod erat &c.

Aliter. Quia $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, erit quoque $\frac{a}{b}+1 > \frac{c}{d}+1$; hoc est, $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$.

Corollarium.

Si verò $a.b < c.d$, etiam componendo $a+b.b < c+d.d$. Dem. eodem modo.

Theorema XVII.

134. Si, ut totum est ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum, etiam reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

Dem. Quantitatibus a, & b demantur partes c, & d, sitque $a:b::c:d$: dico esse

$a-c:b-d::a:b$. Nam per hypothesim erit $ad=bc$; ac propterea $ab-bc=ab-ad$; hoc est, $\overline{a-c}\times b=\overline{b-d}\times a$: ergo $a-c:b-d::a:b$. Quod erat &c.

Aliter. Esto $a+b:c+d::b:d$: dico esse $a:c::a+b:c+d$. Cum enim exponens rationis $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}=m$; erit itaque tum $a+b=m\times\overline{c+d}=mc+md$, & $b=md$; adeoque & residuum $a=mc$; & utrinque per c æqualiter dividendo, $\frac{a}{c}=m=\frac{a+b}{c+d}$: itaque $a:c::a+b:c+d$.

Hoc theorema Euclides sic demonstrat prop. 19. lib. 5: quoniam ut $a+b:c+d::b:d$, erit alternè, seu permutando $a+b:b::c+d:d$; & dividendo $a:b::c:d$; iterumque permutando $a:c::b:d::a+b:c+d$.

THEOREMA XVIII.

135. Si fuerit major ratio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum erit & reliqui ad reliquum major ratio, quàm totius ad totum.

Dem. Quantitatibus a, & b demantur partes c, & d, sitque $a.b>c.d$: dico esse $a-c.b-d>a.b$. Nam per n. 117. $ad>bc$; ac proinde $ab-bc>ab-ad$; hoc est, $\overline{a-c}\times b>\overline{b-d}\times a$; adeoque per n. 118. $a-c.b-d>a.b$. Quod erat &c.

THEO-

THEOREMA XIX.

136. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ per conversionem rationis proportionales erunt. Conversio rationis.

Hoc est, si antecedens unum $a+b$ fuerit ad consequens b, ut antecedens alterum $c+d$ ad consequens alterum d, etiam antecedens primum $a+b$ erit ad a excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum $c+d$ est ad c excessum suum supra consequens alterum; nimirum, si $a+b.b=c+d.d$, erit $a+b.a=c+d.c$.

Dem. Quoniam $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, erit $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; & hinc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; adeoque $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; & proinde $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$; hoc est, $\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$. Quod erat &c.

Vel, si libet, sic: si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dico esse $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$. Nam $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$; hoc est, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$; adeoque $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$; & proinde $\frac{b}{a-b}+1=\frac{d}{c-d}+1$; hoc est, $\frac{b+a-b}{a-b}=\frac{d+c-d}{c-d}$: ergo $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$. Quod erat &c.

Vel

Vel etiam per n. 103.: si $a+b:b::c+d:d$, erit $ad+bd=bc+bd$; adeoque $ad=bc$, & $ac+bc=ac+ad$; proinde $\overline{a+b}\times c=\overline{c+d}\times a$: ergo $a+b:a::c+b:c$. Quod erat &c.

Scholion.

137. Hic argumentandi modus definitur ab Euclide lib. 5. def. 16.: conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem magnitudinem superat.

Omnes Euclidis Interpretes, inquit Clavius in Schol. ad prop. 19., conversionem rationis demonstrant hac ratione: quoniam est $a+b:b::c+d:d$, erit permutando $a+b:c+d::b:d$; hoc est, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: igitur per n. 134. ut tota $a+b$ ad totam $c+d$, ita erit quoque reliqua a ad reliquam c; hoc est, $a+b:c+d::a:c$; & proinde rursus alternando $a+b:a::c+d:c$: quæ est conversio rationis.

Clavius hanc demonstrationem improbat propter adhibitam alternationem, quæ in solis homogeneis obtinet, cum tamen conversio rationis, etiam ubi bina binis sunt heterogenea, locum habeat. Quare rejecta hac communi Interpretum demonstratione hanc substituit: si $a+b:b::c+d:d$, erit dividendo $a:b::c:d$; & invertendo $b:a::d:c$; & tandem componendo $a+b:a::c+d:d$: quæ est conversio rationis.

At Wallisius vol. 1. cap. 35. restitui posse putat, & quidem verissimè, eamdem hujusce propositionis demonstrationem, quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio, quod n. 123. innuimus; puta, si sit ut $a+b$ numerus pedum in linea tota ad b numerum pedum in ablata, sic $c+d$ numerus unciarum in toto pondere ad d numerum unciarum in ablata. Hac ratione, inquit Wallisius, symbola jam non lineas, & pondera, quantitates heterogeneas immediatè significant, sed utrobique numeros, adeoque homogeneas. In hac consideratione locum habebit alternatio. Itaque permutando $a+b:c+d::b:d$, ut numerus totus ad totum, sic ablatus ad ablatum; ideoque per n. 134. $a+b:c+d::a:c$; iterumque permutando $a+b:a::c+d:c$; hoc est, ut pedum numerus totus ad reliquum, sic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam ut linea tota ad reliquam, sic pondus totum ad reliquum. Quod erat propositum.

Atque hoc pacto, ut rectè docet Wallisius, licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis; ubi nempe secunda permutatione restituitur, quod prima deturbatum erat; aut etiam si plures alternationes adhibeantur, modò similiter quarta alternatione restituatur, quod tertia deturbatur; & sic deinceps. Hoc enim si caveatur, nihil absurdi

abſurdi ſequitur in quantitatibus ut ut heterogeneis alternandis.

THEOREMA XX.

138. Si prima quatuor magnitudinum ad ſecundam habeat majorem rationem, quàm tertia ad quartam, per converſionem rationis prima ad exceſſum primæ ſupra ſecundam habebit minorem rationem, quàm tertia ad exceſſum tertiæ ſupra quartam.

Dem. Nam, ſi $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$, erit dividendo per n. 129. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; & inversè per n. 126. $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$; & componendo per n. 133. $\frac{a+b}{a} < \frac{c+d}{c}$. Quod erat &c.

THEOREMA XXI.

Ex æquo ordinatè.

139. Si ſint quotcunque quantitates A, B, C &c., aliæque ipſis numero æquales a, b, c &c. in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ ſint in eadem ratione, puta, $A:B::a:b$, & $B:C::b:c$ &c., erit ex æquo ordinatè, ut ajunt, ut prima A ad tertiam C in prima ſerie, ita prima a ad tertiam c in ſecunda; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

Dem.

Dem. Quia ex hypotheſi $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, erit $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$: ſimiliter, quia $\frac{B}{C} = \frac{b}{c}$, erit $\frac{B}{b} = \frac{C}{c}$: igitur $\frac{A}{a} = \frac{C}{c}$; & conſequenter $\frac{A}{C} = \frac{a}{c}$. Quod erat propoſitum.

Aliter. Quia $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, & $\frac{B}{C} = \frac{b}{c}$, erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$; adeoque $A:C::a:c$. Quod erat &c.

Habetur hìc exemplum rationis compoſitæ, de qua uberiùs infra.

SCHOLION.

140. Hæc argumentandi formula vocatur a Geometris ratio ex æquo, ſive ex æqualitate; & ſic definitur ab Euclide juxta Clavium def. 17. lib. 5.: ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines; & ex his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione; cum, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ſic & in ſecundis prima ad ultimam ſe ſe habuerit.

Vel aliter: ſumptio extremorum per ſubductionem mediorum; nempe, quando extremæ magnitudines ſubductis mediis colliguntur habere unam, eamdemque inter ſe proportionem.

Quoniam verò duobus modis ex æqualitate

 licet

licet argumentari in proportionibus: uno quidem, quando ſumimus binas, ac binas magnitudines in eadem proportione ordinatè procedendo; altero verò, cum ordo invertitur; explicat Euclides duabus ſequentibus definitionibus, quid ſit ordinata proportio, & quid proportio perturbata.

Definitio I.

141. Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, ut conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam. Ita Eucl. def. 18. Nam idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus in prima ſerie, quàm in ſecundis in ſecunda ſerie ſervatur, cum utrobique conferatur prima cum ſecunda, deinde ſecunda cum tertia &c.

Definitio II.

142. Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis aliud quidpiam ad antecedentem. Ita Eucl. def. 19.

Nuncu-

Nuncupatur autem hujuſcemodi proportio perturbata, quòd non ſervetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe, cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda; & ſic deinceps. Sic perturabta eſt proportio magnitudinum in hac duplici ſerie $A, B, C, D;$
$a, b, c, d.$
Si habeatur $A.B = c.d$, & $B.C = b.c$, & $C.D = a.b$, arguitur ex æqualitate rationis in proportione perturbata, cum demonſtratur eſſe $A.D = a.d$.

Porro tam perturbata proportio, quàm ordinata ſemper infert ex æqualitate eamdem extremorum proportionem, etiamſi plures magnitudines ponantur in utraque ſerie.

Theorema XXII.

143. Si fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipſis numero æquales a, b, c in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ ſint in eadem ratione: ſit autem perturbata earum proportio, nempe $A.B = b.c$, & $B.C = a.b$, erit ex æquo perturbatè, ut ajunt, prima A ad tertiam C in prima ſerie, uti prima a ad tertiam c in ſecunda ſerie; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ex æquo perturbatè.

Dem.

Dem. Quia per hypothesim $\frac{A}{B}=\frac{b}{c}$, erit $Ac=Bb$: similiter quia $\frac{B}{C}=\frac{a}{b}$, erit $Ca=Bb$: igitur $Ac=Ca$; adeoque $A:C::a:c$. Quod erat &c.

Aliter. Quia $\frac{A}{B}=\frac{b}{c}$, & $\frac{B}{C}=\frac{a}{b}$, erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{ba}{cb}=\frac{a}{c}$; hinc $A:C::a:c$. Quod erat &c.

SCHOLION.

Utraque argumentandi formula ex æquo ordinatè, & perturbatè fuit ab antiquis Geometris maximè usurpata.

THEOREMA XXIII.

144. Si fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipsis numero æquales a, b, c, sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam: item secundæ priorum ad tertiam major, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Dem. Si $\frac{A}{B}>\frac{a}{b}$, & $\frac{B}{C}>\frac{b}{c}$, dico $\frac{A}{C}$

$>$

$>\frac{a}{c}$. Nam, quia $\frac{A}{B}>\frac{a}{b}$, erit alternè $\frac{A}{a}>\frac{B}{b}$: rursum, quia $\frac{B}{C}>\frac{b}{c}$, erit alternè $\frac{B}{b}>\frac{C}{c}$: ergo $\frac{A}{a}>\frac{C}{c}$; & alternando $\frac{A}{C}>\frac{a}{c}$. Quod erat &c.

Aliter. Si $\frac{A}{B}>\frac{a}{b}$, & $\frac{B}{C}>\frac{b}{c}$, erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}>\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$; hoc est, $\frac{A}{C}>\frac{a}{c}$. Quod erat &c.

THEOREMA XXIV.

145. Si fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipsis numero æquales a, b, c in duplici serie constitutæ, sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: item secundæ priorum ad tertiam major, quàm primæ posteriorum ad secundam; erit quoque ex æquo perturbatè major ratio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Dem. Quia $\frac{A}{B}>\frac{b}{c}$, erit per n. 117. $Ac>Bb$: quia $\frac{B}{C}>\frac{a}{b}$, erit pariter $Bb>Ca$: itaque $Ac>Ca$; & hinc $A:C>a:c$. Quod erat &c.

Aliter. Nam, si $\frac{A}{B}>\frac{b}{c}$, & $\frac{B}{C}>\frac{a}{b}$, e-

rit

rit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C} > \frac{b}{c}\times\frac{a}{b}$; & per reductionem $\frac{A}{C} > \frac{a}{c}$. Quod erat &c.

OBSERVATIO.

Eadem ratione, ſi fuerit $\frac{A}{B}=\frac{b}{c}$, at verò $\frac{B}{C} > \frac{a}{b}$; vel ſi fuerit $\frac{A}{B} > \frac{b}{c}$, & $\frac{B}{C}=\frac{a}{b}$, demonſtrabitur ex æqualitate $\frac{A}{C} > \frac{a}{c}$.

SCHOLION I.

146. Quæ in comparandis rationibus inæqualibus attulimus theoremata, minoris ſunt uſus, quàm quæ in comparatione rationum æqualium demonſtrantur. Verùm, quia antiqui Euclidis Interpretes haſce propoſitiones Euclidæis adjecere, quibus ſæpenumero graviſſimi Auctores, ut Archimedes, Apollonius, Regiomontanus, & alii paſſim utuntur, eaſque, quaſi eſſent Euclidis, citant, placuit hanc rationum inæqualium comparationem annectere. Alia pleraque theoremata rationum inæqualium inpræſens omittam, quæ ex jactis principiis eadem facilitate deduci poſſunt, ne Tyrones fatigem theorematum copià.

SCHO-

SCHOLION II.

147. Habes jam omnes eos de proportionibus argumentandi modos, quos recenſet Euclides lib. 5. elem., puta, ſi quatuor magnitudines ſunt proportionales $a:b=c:d$, etiam alternè, & inversè, & compoſitè, & diviſim, & conversè proportionales erunt.

Walliſius tom. 2. Algeb. cap. 19. eaſdem formulas argumentandi ad pauciores ſic reducit.

Si ſit ut unus antecedens ad ſuum conſequentem, ſic alter ad ſuum, ſic erit & ſumma, vel differentia antecedentium ad ſummam, vel differentiam conſequentium; idemque alternè, & inversè.

Item: ut ſumma ad differentiam primorum, ſic ſumma ad differentiam ſecundorum; idemque alternè, & inversè.

THEOREMA XXV.

148. Si fuerint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes; hoc eſt, ſi $A:a::B:b::C:c::$ &c., erit $A:a::A+B+C:a+b+c$.

Dem. Expoſitæ rationes æquales exprimantur per aliquotas juxta n. 93.: hinc ſtatim

conſtabit

constabit $\frac{A+B+C}{a+b+c}=\frac{A}{a}$. Fiat itaque $\frac{A+B+C}{a+b+c}=\frac{nx+ny+nz}{mx+my+mz}$, & $\frac{A}{a}=\frac{nx}{mx}$: ergo $\frac{nx+ny+nz}{mx+my+mz}=\frac{nx}{mx}$. Nam evidens est aliquotas $x+y+z$ in antecedente $nx+ny+nz$ tot vicium numero contineri, qui repræsentatur per n; & in consequente $mx+my+mz$ easdem aliquotas tot vicium numero contineri, qui designatur per m: eodem modo aliquota similis x in secundo antecedente nx toties continetur, quoties representatur per n; & in mx secundo consequente toties pariter, quoties designatur per m. Quod clariùs appositione numerorum apparebit: sit $n=10$, & $m=5$: habebitur $\frac{10x+10y+10z}{5x+5y+5z}=\frac{10x}{5x}$: itaque, si fuerint magnitudines &c.

Demonstratio universalis est, rationesque commensurabiles, & incommensurabiles peræque comprehendit, uti n. 95. declaratum est.

Aliter. Cum sit $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$, si ponatur $\frac{A}{a}=m$, erit quoque per n. 70. $\frac{B}{b}=m$, & $\frac{C}{c}=m$: hinc $am=A$, & $bm=B$, & $cm=C$; adeoque $am+bm+cm=A+B+C$: itaque $\frac{am+bm+cm}{a+b+c}=\frac{A+B+C}{a+b+c}$; est autem $\frac{am+bm+cm}{a+b+c}=m$: ergo $\frac{A+B+C}{a+b+c}=m$; atqui

atqui per hypothesim etiam $\frac{A}{a}=m$: ergo $\frac{A+B+C}{a+b+c}=\frac{A}{a}$. Quod erat &c.

Aliter. Quia $A:a::B.b$, erit alternando, & componendo, & rursum alternando $A+B:a+b::B:b::C:c$ ex hypothesi: ergo rursum alternando $A+B:C::a+b:c$; & componendo, & iterum alternando, erit $A+B+C:a+b+c::C:c$. Quod erat &c.

Corollarium I.

149. In continuè proportionalibus $a:b::b:c::c:d$ locum obtinet hoc theorema; adeoque $\frac{a+b+c}{b+c+d}=\frac{c}{d}$; hoc est, summa omnium antecedentium $a+b+c$ ad summam omnium consequentium $b+c+d$ est, ut unum antecedens ad unum consequens; & propterea in continuè proportionalibus $\div\!\div\, a.b.c.d.$&c., quorum a sit primus, seu minimus, & g ultimus, seu maximus, & z summa omnium, erit $z-g$ valor analyticus omnium antecedentium, & $z-a$ omnium consequentium; adeoque $a:b::z-g:z-a$.

Corollarium II.

150. Hinc obiter per Analysim deducitur a Wallisio tom. 2. Alg. cap. 19. inventio summæ continuè proportionalium, seu pro-

progressionis geometricæ; nam, si $a:b::z-g:$ $z-a$, erit $bz-bg=az-aa$

Inventio summæ continuè proportionalium.

$$bz-az=bg-aa$$
$$z=\frac{bg-aa}{b-a}:$$

hinc regula arithmetica: si a facto secundi in ultimum, seu maximum subtrahatur quadratum primi, seu minimi; & residuum dividatur per differentiam secundi a primo, quotiens dabit summam progressionis geometricæ. Sit $\div\!\!\div$ 2. 4. 8. 16: erit $\frac{4\times16-4}{4-2}=\frac{60}{2}=30$.

COROLLARIUM III.

AB hoc eodem theoremate derivatæ fuerunt Regulæ Societatis, falsæ positionis, aliæque complures in Arithmetica communi, quas fusiùs exposui Lib. I.

THEOREMA XXVI.

151. SI fuerint quatuor magnitudines geometricè proportionales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erit differentia antecedentium ad differentiam consequentium, ut quævis antecedens ad suam consequentem magnitudinem; hoc est, $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$ $=\frac{c}{d}$.

Dem.

Dem. $\frac{a}{b}=\frac{nx}{mx}$, & $\frac{c}{d}=\frac{ny}{my}$: itaque $\frac{a-c}{b-d}=\frac{nx-ny}{mx-my}$: ergo $\frac{nx-ny}{mx-my}=\frac{nx}{my}$. Nam aliquotæ similes $x-y$, & x pari numero, qui designatur per n, continentur in suis antecedentibus; & similiter pari numero, qui designatur per m, continentur in suis consequentibus.

Aliter. Quia ex hypothesi $a:b::c:d$, erit per n. 90. $mb:b::mc:c$: ergo $\frac{mb-mc}{b-c}=\frac{mc}{c}$ $=\frac{mb}{b}=m$; adeoque æqualitas rationum. Quod erat &c.

Aliter. Quia $a:b=c:d$, erit $ad=bc$: igitur $ab-bc=ab-ad$; hoc est, $\overline{a-c}$ $\times b=\overline{b-d}\times a$: ergo per n. 107. $a-c:b$ $-d::a:b$. Quod erat &c.

THEOREMA XXVII.

152. SI fuerint tres magnitudines A, B, C tribus aliis a, b, c proportionales, differentiæ priorum erunt proportionales differentiis posteriorum $A-B:B-C=a-b:b$ $-c$.

Dem. Quia ex hypoth. $A.B=a.b$, & $B.C$ $=b.c$, erit quoque $A.a=B.b$, & $B.b=C.$ c; est autem per n. 151. $A-B.a-b=A.$ a, sicuti etiam $B-C.b-c=B.b$: ergo erit

$A-B.a-b=B-C.b-c$; & alternando $A-B.B-C=a-b.b-c$. Quod erat &c.

Corollarium I.

153. Si tres inæquales magnitudines a, b, c multiplicatę fuerint per eamdem quantitatem n, & fiant producta an, bn, cn, differentiæ productorum erunt inter ſe, ut differentiæ ipſarum magnitudinum; hoc eſt, $an-bn:bn-cn::a-b:b-c$. Eſt enim per n. 98. $an:bn::a:b$, & $bn:cn::b:c$: itaque per n. 152. erit quoque $an-bn:bn-cn::a-b:b-c$. Quod erat &c.

Corollarium II.

154. Si tres inæquales magnitudines a, b, c per eamdem quantitatem d dividantur, ita ut quotientes ſint $\frac{a}{d}=m$, $\frac{b}{d}=n$, $\frac{c}{d}=r$, quotientium differentiæ erunt inter ſe, ut differentiæ ipſarum magnitudinum; ideſt, $m-n:n-r::a-b:b-c$. Eſt enim ex n. 98. $m:n::a:b$; & rurſum $n:r::b:c$: hinc per n. 152. $m-n:n-r::a-b:b-c$. Quod erat &c.

Theorema XXVIII.

155. Si quatuor pluresve magnitudines continuò, vel diſcretim proportionales per eamdem quantitatem multiplicentur, aut dividantur, hinc facta, inde quoti erunt geometricè proportionales.

Dem. ex n. 98.

Theorema XXIX.

156. Si prima, & ſecunda quatuor magnitudinum proportionalium per eamdem quantitatem multiplicentur, aut dividantur; per aliam verò tertia, & quarta multiplicentur pariter, aut dividantur.

Vel: ſi prima, & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per eamdem quantitatem multiplicentur, aut dividantur; per aliam verò ſecunda, & quarta, in utroque caſu hinc facta, inde quoti erunt geometricè proportionales.

Dem. ex n. 98.

Theorema XXX.

157. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales, ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

$$A:nA::a:na$$
$$B:nB::b:nb$$

Dem. Nam $A\pm B:nA\pm nB::a\pm b:na\pm nb::1:n$. Quod erat &c.

THEOREMA XXXI.

158. SI quatuor magnitudines proportionales per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur, etiam factæ magnitudines, vel quotæ proportionales erunt.

Sint I. $A:mA::a:ma$
$B:nB::b:nb$

Erit itaque $AB:mnAB::ab:mnab::1:mn$. Quod erat &c.

Sint II. $\frac{A}{B}:\frac{mA}{nB}::\frac{a}{b}:\frac{ma}{nb}::1:\frac{m}{n}$. Quod erat &c.

Vel: in utroque casu, si fiat productum extremarum, & mediarum, reperietur æqualitas, atque adeo proportionalitas per n. 107.

COROLLARIUM I.

159. SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam earum quadrata, cubi, & reliquæ altiores potestates erunt similiter proportionales. Nam, ut earum quadrata efficias, idem præstandum tibi erit, quod theoremate præcipitur; hoc est, quatuor magnitudines proportionales $a.b::c.d$ multiplicandæ erunt per totidem proportionales $a.b::c.d$.

Similiter, ut fiant cubi, multiplicandi sunt termini proportionis $aa.bb::cc.dd$ per alios totidem proportionales $a.b::c.d$.

Denique

Denique quatuor proportionalium magnidinum $aa.bb::cc.dd$ radices sunt pariter proportionales. Nam harum radices elicere perinde est, ac si termini $aa.bb::cc.dd$ per alios totidem proportionales $a.b::c.d$ dividerentur.

CAPUT QUARTUM.

De progressione geometrica.

QUid causæ sit, cur progressionis geometricæ affectiones, &, ut vocant, symptomata paulo diligentiùs persequar is planè intelliget, qui longiùs in Analysi provectus fuerit; nam hinc & logarithmorum pendet origo, & calculi exponentialis, & infinitesimalis. Quare Tyronibus auctor sum, ut non ante ad alia properent, quàm progressionem geometricam probè teneant.

SYNOPSIS.

PRogressionis geometricæ crescentis, & decrescentis notio. Interdum ab unitate, interdum ab alio quovis termino inchoatur. Exponentes potestatum in progressione geometrica sunt indices distantiæ, seu earum logarithmi. Loca terminorum progressionis geometricæ numerantur ab unitate; vel a primo termino exclusivè: hinc 0, 1, 2, 3, 4 &c. designant distantiam ab unitate, vel a primo termino. Origo logarithmorum. Constitutio

 utriusque

utriuſque progreſſionis aſcendentis, & deſcendentis; & reſolutio problematum ex varia datorum combinatione. Theoremata, ex quibus Calculi exponentialis, & logarithmorum doctrina derivatur. Regulæ logarithmicæ multiplicationis, diviſionis, extractionis radicum. Origo poteſtatum, quæ negativæ dicuntur. Utriuſque progreſſionis geometricæ ab unitate aſcendentis per poteſtates poſitivas, & ab unitate deſcendentis per negativas, analytica expreſſio. Origo poteſtatum, quas imperfectas vocant, quarum aliæ poſitivæ, quæ aſcendendo, aliæ negativæ ſunt, quæ deſcendendo progreſſionem geometricam conſtituunt: hinc quantitates radicales, ſeu irrationales ad formam rationalium multiplicantur, dividuntur &c. Progreſſionis geometricæ finitæ, & infinitæ ex iiſdem principiis affectiones demonſtratæ. In utraque progreſſione inventio ſummæ multiplici methodo demonſtrata. Quàm facilis ſit a finita ad infinitam progreſſionem tranſitus.

DEFINITIONES.

Progreſſionis creſcentis, & decreſcentis notio.

160. Progreſſio geometrica, ſeu termini in continua proportione geometrica dici ſolent, quando per æquales rationes continuè proceditur; oriunturque continuè multiplicando per communis rationis exponentem, ſeu continuum multiplicatorem, creſcendo quidem, ſi continuus ille multiplicator ſit major, quàm 1, decreſcendo, ſi minor; puta,

$$2 \,.\, 2\times2 \,.\, 2\times4 \,.\, 2\times8 \,.\, 2\times16$$
$$a \,.\, am \,.\, am^2 \,.\, am^3 \,.\, am^4.$$

Vel: $32 \,.\, 16 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 2$

$$a \,.\, \frac{1}{2}a \,.\, \frac{1}{4}a \,.\, \frac{1}{16}a \,.\, \frac{1}{32}a.$$

In duabus primis progreſſionibus communis multiplicator eſt $2 = m$: in tertia, & quarta communis multiplicator, ſeu exponens communis rationis eſt $\frac{1}{2} = \frac{1}{m}$; vel, quod tantundem eſt, $2 = m$ eſt communis diviſor, ex quo hæc ſeries gignitur:

$$a \,.\, \frac{a}{m} \,.\, \frac{a}{m^2} \,.\, \frac{a}{m^3} \,.\, \frac{a}{m^4} \,.\, \frac{a}{m^5} \text{ \&c.}$$

161. Progreſſio geometrica omnium ſimpliciſſima, & maximè naturalis eſt, quæ ab 1 inchoatur. In hoc caſu terminus ſecundus eſt communis rationis exponens, ſeu communis multiplicator: ſic

$$1 \,.\, a \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,.\, a^4 \,.\, a^5 \,.\text{ \&c.}$$

162. Si ab alio termino incipiat, ut pridem ab a, tantundem eſt atque compoſita ab æqualium progreſſione a, a, a &c. in progreſſionem geometricam ducta, aut per hanc diviſa; ſic

$$\begin{array}{l} a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \\ 1 \,.\, m \,.\, m^2 \,.\, m^3 \,.\, m^4 \,.\, m^5 \\ \hline a \,.\, am \,.\, am^2 \,.\, am^3 \,.\, am^4 \,.\, am^5 \end{array}$$

Vel: $a \,.\, \frac{a}{m} \,.\, \frac{a}{m^2} \,.\, \frac{a}{m^3} \,.\, \frac{a}{m^4}$ &c.

163. IN progressione geometrica numeri cuilibet termino suffixi, brevitatis studio, non solùm potestatem ejusdem, verùm etiam

Indices distantiæ.

distantiam a primo designant; ac proinde vocari solent indices distantiæ, seu exponentes potestatis, quos etiam logarithmos alibi appellabimus.

164. LOca terminorum progressionis numerantur ab unitate exclusivè; puta, 1°. $a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5$; vel, si progressionis principium non sit unitas, exclusivè a termino primo progressionis, uti $a . am^1 . am^2 . am^3 . am^4$; id enim,

Logarithmorum origo.

ut deinde apparebit, usui magis inservit. Quare numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. supra progressionis geometricæ terminos adscripti, indicant quotus quisque sit ab unitate, seu termino primo. Supra unitatem scribitur 0: supra primum ab unitate ponitur 1: supra sequentem 2; & sic deinceps ordine naturali.

Scholion.

HÆc potestatum compendiaria expressio ope exponentium, seu indicum distantiæ, puta, 1°. $a^1 . a^2 . a^3 . a^4$ &c. viam aperuit facillimo calculo in variis operationibus, quæ progressiones spectant; quippe additio, & subductio in exponentibus respondet multiplicationi, & divisioni in ipsis terminis geometricè proportionalibus. Sic $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; & $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$ &c. Atque hinc tanquam a vero principio tota logarithmorum doctrina derivatur, & calculus exponentialis. Sed de his paulo infra erit agendum.

165. HIs præmissis, progressionis geometricæ affectiones præcipuas aggredior sequentibus propositionibus explicandas; Quod quò rectius fiat, hæc sunto, quibus usurus sum, symbola. Terminus minimus vocetur a, maximus g: extremorum rectangulum $a \times g$: maximi ad minimum ratio $\frac{g}{a}$: numerus terminorum n: communis ratio, seu exponens m: distantia termini cujusvis a dato $d = n - 1$: (est enim distantia unitate minor, quàm est numerus terminorum, ut declaratum est n. 164., & in Scholio) summa progressionis s.

PROPOSITIO I.

166. QUilibet terminus progressionis geometricæ ascendentis, in communem denominatorem ductus, producit terminum

Constitutio utriusque progressionis.

proximè majorem. Quilibet terminus per rationem communem divisus, dat terminum proximè minorem in progressione descendente.

Demonstratio patet ex formula, qua utraque progressio n. 160. exprimitur; nempe

$$a . am^1 . am^2 . am^3 . \&c.$$

$$a . \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3} \quad \&c.$$

PRO-

PROPOSITIO II.

167. DAto primo termino progressionis geometricæ, ejusque denominatore communi, progressionem ipsam constituere.

Resolutio, & demonstratio sequitur ex præced.

PROPOSITIO III.

168. QUilibet terminus progressionis geometricæ ascendentis est factum ex ductu primi termini in denominatoris potestatem indici cognominem, seu cognominem distantiæ a termino primo, ipsum primum non computando; idest, cujus potestatis exponens sit numerus terminorum unitate mulctatus, nempe $a m^d$, vel $a m^{n-1}$.

Inventio cujuslibet termini.

Quivis autem terminus progressionis descendentis est quotus primi termini divisi per rationis communis potestatem distantiæ cognominem, seu cujus exponens sit numerus terminorum unitate mulctatus.

Demonstratio consequitur ex n. 166., & ex formula utriusque progressionis n. 160., & 161.

PROPOSITIO IV.

169. DAtis in progressione geometrica termino primo a, communi denominatore m, & termini quæsiti distantia a primo, eumdem terminum invenire.

Invenire

Invenire oporteat sextum progressionis ascendentis terminum. Quoniam termini quæsiti a primo distantia est $6-1=n-1=d$, terminus primus a multiplicetur per quintam denominatoris m potestatem: erit $a m^5 = a m^{n-1} = a m^d$ terminus quæsitus.

Vel: si progressio sit descendens, terminus primus a dividatur per quintam potestatem denominatoris: fractio $\frac{a}{m^5} = \frac{a}{m^{n-1}} = \frac{a}{m^d}$ erit terminus quæsitus.

Demonstratio patet ex n. 168.

Præterea per def. prog., vel ex n. 166. pro singulis distantiæ gradibus exponens potestatis communis denominatoris unitate augetur: ergo pro omnibus gradibus tot unitatibus, quot sunt ipsi distantiæ gradus.

PROPOSITIO V.

170. DAto termino quovis $a m^5$, & communi denominatore m, & cujusvis z minoris distantià 2 a dato, invenitur z, dividendo datum per rationis communis potestatem distantiæ cognominem $z = \frac{a m^5}{m^2} = a m^3$.

Sequitur ex def., vel ex præced.

PROPOSITIO VI.

171. DAtà duorum quorumvis terminorum ab invicem distantià $d=3$ cum denominatore

nominatore communi m, datur eorumdem ad invicem ratio $m^3 = m^d$.

Sequitur ex n. 169., & 170.

PROPOSITIO VII.

172. Data terminorum quorumvis ad invicem ratione m^3 cum eorumdem ab invicem distantia 3, datur communis ratio, seu denominator.

Est enim per præced. datorum terminorum ratio ad invicem m^3, nempe rationis communis m potestas distantiæ cognominis: extracta igitur analoga radice habetur communis ratio $\sqrt[3]{m^3} = m$.

PROPOSITIO VIII.

173. Data terminorum quorumvis ad invicem ratione m^3 cum ratione communi m, datur eorumdem ab invicem distantia, quærendo nempe, quota potestas m^3 sit ipsius m.

Sequitur ex def., & ex n. 169.

PROPOSITIO IX.

174. Termini duo quilibet cum duobus aliis ejusdem progressionis quibuslibet in eadem ab invicem distantia positi, sunt & in eadem ad invicem ratione constituti.

Demons. ex n. 171. Cum enim termini majoris

majoris ad minorem ratio sit m^d, si utrobique æqualis sit tum m communis denominator, tum d distantia, erit & utrobique æqualis ratio m^d. Quare in serie continuè proportionalium $a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7 . a^9$ erit $a^1 : a^3 :: a^5 : a^7$; nam $\frac{a^3}{a} = \frac{a^7}{a^5} = a^2$. Sic $a^2 : a^4 :: a^6 : a^8$ &c. Vel, si fiat $a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5 . am^6 . am^7$, erit $a : am^2 :: am^4 : am^6$; sive $am : am^3 :: am^5 : am^7$ &c.

PROPOSITIO X.

175. Si eadem sit utrobique eorumdem majoris ad minorem ratio, eadem est & utrobique distantia.

Dem. Cum enim per hypothesim sit utrobique æqualis tum m, tum md, erit & utrobique æqualis d, hoc est, distantia; puta, si $am : am^3 :: am^5 : am^7$, erit & utrobique æqualis distantia.

PROPOSITIO XI.

176. Si ex terminis quotvis continuè proportionalibus, puta, $\div\!\!\div a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$ seligantur quotlibet in eadem continuè ab invicem distantia, erunt & illi in continua progressione geometrica constituti; nimirum $\div\!\!\div a, c, e, g, i$; vel $\div\!\!\div b, d, f, h, k$;

k; vel ∺ a, d, g, k; vel denique ∺ a, e, i continuè proportionales.

Dem. ex n. 174.; nam æqualibus continuè rationibus progrediuntur.

PROPOSITIO XII.

177. SI ex terminis ita continuè proportionalibus selecti quotlibet sint item continuè proportionales, æqualibus ab invicem distantiis sumpti sunt.

Dem. ex n. 175.

PROPOSITIO XIII.

178. IN progressione geometrica ∺ a, b, c, d, e, f, g, data ratione communi m cum numero terminorum n, invenitur extremorum ad invicem ratio $\frac{g}{a}$.

Resolutio, & demonstratio pendet ex n. 168.; est enim per n. 165. $n - 1 = d$; ideoque $\frac{g}{a} = m^d = m^{n-1}$.

PROPOSITIO XIV.

179. DAta extremorum ratione $\frac{g}{a}$ cum numero terminorum n, habetur communis ratio m.

Resol. & dem. pendet ex n. 168.; est enim

$n - 1$

$n - 1 = d$, & $\frac{g}{a} = m^d$: ergo extracta radice analoga $\sqrt[d]{\frac{g}{a}} = \sqrt[d]{m^d} = m$.

PROPOSITIO XV.

180. DAta extremorum ratione $\frac{g}{a}$ cum ratione communi m, habetur numerus terminorum n.

Cum enim $\frac{g}{a} = m^d$, quærendo, quota potestas est $\frac{g}{a}$, vel m^d ipsius m, habetur extremorum distantia $d = n - 1$; adeoque $n = d + 1$.

PROPOSITIO XVI.

181. DAto termino primo a cum ratione communi m, & numero terminorum n, habetur ultimus g.

Cum enim $\frac{g}{a} = m^d$, erit $g = a m^d$.

PROPOSITIO XVII.

182. DAto termino ultimo g cum ratione communi m, & numero terminorum n, habetur primus a.

Nam propter $m^d = \frac{g}{a}$, invenietur $a = \frac{g}{m^d}$.

De

De origine, & usu logarithmorum, seu exponentium.

PROPOSITIO XVIII.

183. Continuè proportionalium $\div a$, am^1, am^2, am^3 &c., quorum principium unitas non est, si duorum quorumvis factum per terminum primum dividatur, prodibit terminus, cujus exponens, sive distantia a primo æquatur illorum exponentibus simul sumptis.

Dem. Sit terminorum invicem multiplicatorum unius exponens $2 = t$, alterius $3 = r$: erunt ergo per n. 168. termini illi am^2, & am^3, hoc est, am^t, & am^r: horum ergo rectangulum $am^2 \times am^3 = aam^{2+3} = aam^5$ ex Schol. n. 164. Itaque aam^5 divisum per a exhibet am^5, idest, terminum illum, cujus exponens est $5 = 2 + 3$, exponentium illorum aggregato æqualis.

PROPOSITIO XIX.

184. In progressione geometrica, cujus principium unitas non est, si termini tres, quatuor, quinque, aut plures invicem multiplicentur, productum tot vicibus unà minùs divisum per terminum primum, sive ea primi potestate divisum, quæ uno gradu minor est, quàm numerus terminorum sic continuè multiplicatorum, exhibet terminum, cujus index, seu exponens

ponens illorum exponentium aggregato æquatur.

Dem. Si continuè multiplicatorum exponentes sint r, s, t, erunt per n. 168. termini am^r, am^n, am^t, qui invicem ducti facient $aaam^{r+n+t}$, sive a^3m^{r+n+t}: quod productum si dividatur per aa, prodibit am^{r+n+t} terminus, cujus exponens est $r + n + t$ per n. 168.

PROPOSITIO XX.

185. Si continuè proportionalium primus terminus sit unitas, nimirum 1°, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 &c., duobus, pluribusque continuè multiplicatis, proveniet terminus, cujus index, seu exponens illorum exponentium aggregato æquatur.

Dem. consequitur ex n. 183., & 184.; nam quæ illic imperatur divisio per terminum primum sive semel, sive sæpius facienda, hoc casu, cum primus terminus ponatur 1, nihil immutabit.

PROPOSITIO XXI.

186. In progressione geometrica, cujus principium sit 1, erit quilibet terminus ipsa potestas rationis communis, quæ termini illius indici est cognominis.

Dem. ex n. 167.; nam, si $a = 1$, erit $am^d = 1m^d = m^d$.

 Scho-

Scholion.

A Tque hinc origo logarithmorum, & calculi exponentialis: sufficiat digito fontem indicasse: regulas præcipuas brevissimè complectar: reliqua alibi accuratiùs.

Definitio.

187. L Ogarithmi vocantur numeri arithmeticè proportionales totidem geometricè proportionalium indices; puta, numerorum geometricè proportionalium 1, 10, 100, 1000 &c. statuerunt indices, seu logarithmos arithmeticè proportionales a zero, seu nihilo incipientes, 0, 1, 2, 3 &c.; quemadmodum declaravimus in definitione progressionis geometricæ.

Horum autem indicium, seu logarithmorum ope per additionem, & subductionem magna cum facilitate id perficitur, quod non nisi per multiplicationem, & divisionem fieri oporteret.

Similiter per bipartitionem, tripartitionem, quadripartitionem &c. perficitur, quod naturali methodo per extractionem radicis quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ &c. perficiendum fuisset. Regulas exponam interjectis theorematis, ex quibus illæ proficiscuntur.

Re-

Regula I.

De multiplicatione logarithmica.

188. I N omni progressione geometrica, cujus principium est unitas, 1^o. a^1. a^2. a^3. a^4. &c. datorum terminorum logarithmi simul additi æquantur logarithmo, seu exponenti termini ex datorum invicem multiplicatione producti. Multiplicatio logarithmica.

Sequitur ex n. 185.; sunt enim logarithmi numerorum ab 1 continuè proportionalium indices.

Corollarium.

H Inc potestates quæcunque ejusdem magnitudinis a commodissimè multiplicantur sola exponentium additione; nam $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ &c.; considerari enim possunt, perinde ac si constituant progressionem geometricam, cujus principium sit unitas, 1. a^1. a^2. a^3. &c.

Propositio XXII.

189. C Ontinuè proportionalium terminorum, quorum principium unitas non est, si duorum alter per alterum dividatur, & quotiens in terminum primum ducatur, prodibit terminus, cujus index æquatur

diffe-

differentiæ indicum terminorum expoſitorum.

Dem. Sit majoris index $r+t=4+3$, minoris $r=4$; adeoque eorum differentia $t=3$: erunt ergo per n. 168. ipſi termini am^{r+t}, & am^r: facta itaque diviſione $\frac{am^{r+t}}{am^r}=m^t$. Hic quotiens m^t ducatur in terminum primum a: habetur am^t, terminus, cujus index t per n. 168.

PROPOSITIO XXIII.

190. SI progreſſio geometrica incipiat ab unitate, progreſſio verò arithmetica exponentium a zero, ſeu nihilo, quotiens cujuſvis termini per alium diviſi eſt ipſe terminus, cujus exponens æquatur exponentium illorum differentiæ.

Sequitur ex præced.; nam, ſi $a=1$, erit $am^t=m^t$.

Scholion.

Differentiam voco exceſſum indicis termini diviſi ſupra indicem dividentis, uti $\frac{m^6}{m^3}=m^{6-3}=m^3$; & propterea, ſi hic major fuerit $\frac{m^3}{m^6}$, quotientis index erit negativus $m^{3-6}=m^{-3}$; quemadmodum infra explicabitur.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

191. IN progreſſione geometrica, cujus principium eſt 1, ſi terminorum alter per alterum dividatur, erit quotiens ipſa poteſtas rationis communis, differentiæ indicum datorum numerorum cognominis.

Sequitur ex præced.

Regula II.

Diviſionis logarithmicæ.

192. IN omni progreſſione geometrica, cujus principium eſt unitas, ſi ex logarithmo dividendi auferatur logarithmus diviſoris, quod reliquum eſt, logarithmus erit quotientis. Diviſio logarithmica.

Sequitur ex n. 190.; quippe logarithmi ſunt terminorum ab 1 continuè proportionalium indices.

Corollarium I.

193. POteſtates quæcunque ejuſdem magnitudinis a facillimè ſola exponentium ſubtractione dividuntur: ſic $\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3$. Ratio eſt, quia poteſtates a^5, & a^2 conſiderari poſſunt tanquam in ſerie progreſſionis geometricæ incipientis ab unitate, 1°. $a^1.a^2.a^3.a^4.$ &c., cujus logarithmi conſtituunt progreſſionem arithmeticam numerorum a zero incipientium: ergo per regulam diviſionis logarithmicæ &c.

Co-

Corollarium II.

194. Dividere oporteat a^1 per a^1: exponens 1 divisoris subducatur ab exponente 1 dividendi: residuum $1-1=0$ erit exponens quotientis, qui consequenter erit a^{1-1} $=a^0$. Hæc analytica expressio a^0 est symbolum unitatis; nam $\frac{a^1}{a^1}=1=a^{1-1}=a^0$; cujus quidem symboli habenda est ratio diligenter, quippe quod vicem unitatis subit in progressione geometrica $a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 .$ &c.

Expressio unitatis.

Corollarium III.

Origo potestatum negativarum.

195. Ab eadem regula divisionis logarithmicæ derivantur progressiones geometricæ potestatum, quæ dici solent negativæ.

Dividere oporteat a^0 per a^1: exponens erit $0-1=-1$, & quotiens a^{-1}, juxta regulam divisionis logarithmicæ. Similiter, si dividatur a^{-1} per a^1, exponens erit $-1-1$ $=-2$, & quotiens a^{-2}. Si dividatur a^{-2} per a^1, exponens erit $-2-1=-3$, & quotiens a^{-3}. Quare, si eadem methodo progrediaris, novam obtinebis potentiarum seriem, quarum exponentes constituent progressionem arithmeticam negativam numerorum naturalium. Hæc autem series erit a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} &c.; atque ita porro in infinitum, ubi potestas foret $a^{-\infty}$.

Potestates negativæ.

Corollarium IV.

196. Rursum hæc eadem series aliter exprimi potest; cum enim ex dictis n. 194. $a^0=1$, si loco a^0 substituatur unitas, eademque dividatur per a^1, idem quotus obtinebitur $\frac{1}{a^1}=a^{-1}$. Rursum si $\frac{1}{a^1}$ dividatur per a^1, quotiens erit $\frac{1}{a^2}=a^{-2}$. Si $\frac{1}{a^2}$ dividatur per a^1, quotus erit $\frac{1}{a^3}=a^{-3}$.

Intelliges jam potestates negativas nihil esse aliud, quàm fractiones, quæ pro numeratore semper habent unitatem, & pro singulis denominatoribus illas ipsas potestates tanquam positivas consideratas. Quare utroque modo poterit eadem series exhiberi

$$a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3},\ a^{-4},\ a^{-5}\ \&c.$$
$$\frac{1}{a^1},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^5}\ \&c.$$

Expressio duplex.

Ut autem series prima in secundam transformetur, vides præterea nullo alio artificio opus esse, quàm ut exponentes potestatum fiant positivi, & quilibet terminus subscribatur ad instar denominatoris fractionis, cujus numerator sit semper unitas. Similiter ut secunda series in primam transformetur, satìs est numeratorem delere, & exponentem denominatoris transformare in negativum.

COROLLARIUM V.

197. Sciscitaberis fortasse, quid tandem significent hæ series? Respondeo utramque esse symbolum progressionis decrescentis in infinitum. Finge enim $a^1 = 4$: erit ergo

$$\frac{1}{a^1} = a^{-1} = \frac{1}{4};$$
$$\frac{1}{a^2} = a^{-2} = \frac{1}{16};$$
$$\frac{1}{a^3} = a^{-3} = \frac{1}{64}.$$

Utriusque progressionis indefinitæ symbolum. Atque ita alterutra ex his duabus seriebus $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$ &c., vel $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ &c. constituit progressionem descendentem geometricam fractionum, quarum denominatores sunt potestates ipsius $a^1 = 4$. Hæc autem series, si conjungatur cum serie potentiarum ejusdem $a^1 = 4$, producet seriem hinc inde indefinitam potestatum ipsius 4 sive ascendendo, sive descendendo.

$$a^{-\infty} \text{ \&c. } a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3 \text{ \&c. } a^{\infty}$$
$$\text{\&c. } \frac{1}{64}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16, 64 \text{ \&c.}$$

In hoc schemmate vides valores terminorum a^0, a^1, a^2 &c. continuò crescere, & a^{∞} terminum infinitè distantem esse valoris infiniti: contra verò valores a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} &c. continuò decrescere, & $a^{-\infty}$ esse valoris infinitè parvi; esset enim 1 unitas divisa per infinitum, quod certè quotum infinitè parvum exhiberet; nam quoti ea proportione diminuuntur, qua augentur divisores.

COROLLARIUM VI.

REGULA III.

De logarithmica potestatum elevatione.

198. Duplum logarithmi, seu exponentis alicujus potestatis adæquat exponentem sui quadrati, triplum adæquat exponentem sui cubi; atque ita deinceps.

Sequitur ex n. 188.; cum enim factores potestatis quadraticæ sint inter se æquales, hoc est, quadratum sit factum ex radice in se ipsam, logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis. Eodem modo patet logarithmum cubi esse triplum, biquadrati quadruplum, potestatis quintæ quintuplum &c. Elevatio potestatum.

Itaque potestatis hujus a^2 quadratum erit $a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^{2\times 2} = a^4$: cubus erit $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3} = a^6$ &c. Similiter alterius potestatis a^3 quadratū erit $a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^{3\times 2} = a^6$: cubus erit $a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3} = a^{3\times 3} = a^9$ &c.

Ubi vides logarithmum, seu exponentem potentiæ prodire, si logarithmum radicis multiplices per exponentem potestatis, ad quam debet elevari. Sic potestas x^m evecta ad potestatem

teſtatem n eſt x^{mn}: poteſtas y^3 evecta ad dignitatem 2 eſt y^6 &c.

Pariter poteſtatis hujus perfectæ negativæ a^{-2} quadratum erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratum a^{-8} &c.

Corollarium VII.

Regula IV.

De logarithmica radicum extractione.

199. Semiſſis $\frac{1}{2}$ exponentis alicujus poteſtatis adæquat exponentem ſuæ quadratæ radicis: triens $\frac{1}{3}$ exponentem ſuæ radicis cubicæ: quadrans $\frac{1}{4}$ exponentem ſuæ radicis quadrato-quadratæ; atque ita deinceps. Extractio radicum.

Itaque poteſtatis hujus a^{12} quadrata radix erit $a^{\frac{12}{2}} = a^6$: radix cubica $a^{\frac{12}{3}} = a^4$: radix quadrato-quadrata $a^{\frac{12}{4}} = a^3$ &c.

Intelligis ergo logarithmum radicis haberi, ſi exponens poteſtatis datæ dividatur per exponentem radicis datum; nimirum, radix quadrata ex x^6 eſt $x^{\frac{6}{2}}$, vel, ut alii ſcribunt, $x^{6:2}$: radix n ex x^{mn} eſt x^m: radix n ex x^m eſt $x^{\frac{m}{n}}$, vel $x^{m:n}$.

Sic etiam poteſtatis perfectæ negativæ a^{-12} quadrata radix eſt a^{-6}: radix cubica eſt a^{-4}: radix quadrato-quadrata a^{-3} &c.

Co-

Corollarium VIII.

Origo poteſtatum imperfectarum.

200. Poteſtates, quas vocant imperfectas, dicuntur illæ, quæ fractiones habent pro ſuis exponentibus. Hæ pariter dividuntur in poſitivas, & negativas, quarum origo ex præced. derivatur.

Nam, quemadmodum a^2 eſt quadrata radix poteſtatis a^4, ita $a^{\frac{1}{2}}$ deſignat quadratam radicem ex a, ſive a^1; quippe, ſicuti exponens ipſius a^2 eſt ſemiſſis exponentis alterius a^4, ita exponens ipſius $a^{\frac{1}{2}}$ adæquat ſemiſſem exponentis alterius a^1. Poteſtates imperfectæ.

Similiter, ſicuti a^2 eſt radix cubica poteſtatis a^6, quippe exponens ipſius a^2 eſt tertia pars exponentis alterius a^6, ita $a^{\frac{1}{3}}$ erit radix cubica, quæ extrahitur ex a^1, quandoquidem exponens ipſius $a^{\frac{1}{3}}$ eſt tertia pars exponentis alterius a^1.

Ob eamdem rationem $a^{\frac{3}{2}}$ deſignabit quadratam radicem ipſius a^3; & $a^{\frac{2}{3}}$ radicem cubicam ipſius a^2; & $a^{\frac{3}{4}}$ radicem quadrato-quadratam ipſius a^3; atque ita deinceps.

Quare poteſtates imperfectæ, ſive quæ fractiones pro ſuis exponentibus habent, nihil Poſitivæ.

aliud

aliud sunt, quàm radices designatæ a denominatoribus fractionum, & extractæ ex potestatibus, quarum exponentes sunt soli numeratores earundem fractionum. Sic $a^{\frac{1}{2}}$ est radix secunda ipsius a^1; & $a^{\frac{2}{3}}$ est radix tertia ipsius a^2 &c.

Negativæ. Hæc eadem quantitatum radicalium symbola traducenda sunt ad potestates imperfectas negativas. Itaque $a^{-\frac{1}{2}}$ erit quadrata radix ipsius a^{-1}; & $a^{-\frac{1}{3}}$ radix cubica ejusdem a^{-1}; & $a^{-\frac{3}{2}}$ erit radix quadrata potestatis negativæ a^{-3}.

Corollarium IX.

201. Jam verò non solùm potestates perfectæ tum positivæ, tum negativæ, uti antea docuimus, verùm etiam potestates imperfectæ positivæ, & negativæ, & ipsæ quoque ordine dispositæ progressionem geometricam constituunt, earumque exponentes rite collocati progressionem quoque alteram componunt arithmeticam, ita ut exponens unitatis sit etiam zero, seu nihilum.

Progressio geometrica ab utrisque constituta. Itaque, quemadmodum in superiore exemplo quantitates

$$a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3$$

$$\frac{1}{64},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4,\ 16,\ 64$$

conficiunt

conficiunt sive ascendendo, sive descendendo progressionem geometricam ab unitate; & exponentes, seu logarithmi progressionem arithmeticam a zero, seu nihilo: ita etiam earumdem quantitatum radices quadratæ, cubicæ &c. simillimas progressiones efficient

$$a^{-\frac{3}{2}},\ a^{-\frac{2}{2}},\ a^{-\frac{1}{2}},\ a^0,\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{2}{2}},\ a^{\frac{3}{2}};$$

Vel $\sqrt[2]{\frac{1}{a^3}},\ \sqrt[2]{\frac{1}{a^2}},\ \sqrt[2]{\frac{1}{a^1}},\ 1,\ \sqrt[2]{a^1},\ \sqrt[2]{a^2},\ \sqrt[2]{a^3}$.

Ubi vides exponentes primæ progressionis esse $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ in progressione arithmetica.

Scholion.

202. Quæres, quid causæ fuerit, cur Analystæ tot symbola excogitaverint in exprimendis potestatibus, earumque radicibus.

Resp. Quantum in Analysi commodi hæc attulerint, vix dici potest, & processu operis Tyrones idipsum assequentur. Hoc enim artificio quantitates irrationales, seu radicales ad formam rationalium reducuntur: hinc peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium ad instar tractari possunt, quemadmodum primi docuerunt Newtonus, atque Leibnitius; nimirum quantitates incommensurabiles considerari possunt velut potestates imperfectæ quantitatum, & perfectarum ad instar multiplicari, dividi &c.

Itaque

Itaque ex dictis $\sqrt[2]{a^1}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a^1}=a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a^1}=a^{\frac{1}{4}}$ &c. Denominator fractionis semper designat gradum potestatis, ad quam quantitas indeterminata a supponitur evecta. Pariter quantitas radicalis complexa $\sqrt[2]{\overline{a+c}}$ exprimi poterit $\overline{a+c}^{\frac{1}{2}}$, vel per exponentes indeterminatos $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=a^{n:m}$.

Radicales ad formam rationaliū.

Corollarium X.

Regula V.

Multiplicatio radicalium ejusdem denominationis.

203. IN multiplicatione addantur fractiones, quæ vicem exponentium subeunt: summa erit exponens facti. Multiplicare oporteat $\sqrt[2]{a^1}\times\sqrt[2]{a^1}$: fiat per Schol. præced. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}$: factum erit $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{2}}=a^1$. Esto etiam $\sqrt[2]{a^3}\times\sqrt[2]{a^7}$: fiat $a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{7}{2}}$; tum per reg. $a^{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}=a^{\frac{10}{2}}=a^5$ factum.

Demonstratio sequitur ex n. 185., & 201.; cum enim numeratores fractionum exponentes sint potestatum imperfectarum; & illi quidem in progressione arithmetica, potestates autem in geometrica progrediantur, numeratores

meratores pro harum logarithmis rectè habentur: ergo summa exponentium, quos habent potestates imperfectæ se mutuò multiplicantes, erit exponens facti.

Hæc eadem regula, eademque demonstratio locum habet in multiplicatione quantitatum radicalium, quæ exprimuntur per potestates imperfectas, quas negativas vocant.

Sit $\frac{1}{\sqrt[2]{a^1}}\times\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}$: fiat per n. 201., & 202. $a^{-\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{3}{2}}$: factum erit $a^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=a^{-\frac{4}{2}}=a^{-2}$.

Radicaliū multiplicatio.

Sit rursum $\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}\times\frac{1}{\sqrt[2]{a^5}}$: expressio factorum radicalium in hanc mutetur per n. 201. $a^{-\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{5}{2}}$; tum per reg. $a^{-\frac{8}{2}}=a^{-4}$, quæ ultima expressio æquivalet huic $\frac{1}{a^4}$.

Idemque præstandum, quoties exponentes indeterminati sunt; nam $a^{-\frac{m}{p}}\times a^{-\frac{n}{p}}=a^{-\frac{m-n}{p}}$: quæ expressio per n. 201., & 202. æquivalet fractionibus $\frac{1}{\sqrt[p]{a^m}}\times\frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}=\frac{1}{\sqrt[p]{a^{m+n}}}$.

Sic $a^{-3}\times a^2=a^{-3+2}=a^{-1}=\frac{1}{a}$.

Et $a^{-\frac{3}{2}}\times a^{\frac{5}{2}}=a^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=a^{\frac{2}{2}}=a^1$.

RE-

Regula VI.

Multiplicatio radicalium diverſæ denominationis.

204. **R**Educantur fractiones, quæ exponentium locum tenent, ad eamdem denominationem more fractorum: ſumma exponentium erit exponens facti.

Quantitas irrationalis $\sqrt[2]{a^1}$ multiplicanda ſit per aliam pariter irrationalem $\sqrt[3]{a^1}$: tranſformetur utraque in poteſtatem imperfectam $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}$; tum fractiones, quæ vicem exponentium ſubeunt, revocentur ad eamdem denominationem, hoc eſt, $a^{\frac{3}{6}} \times a^{\frac{2}{6}}$: factum erit $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$.

Sic $\frac{1}{\sqrt[2]{a^1}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{6}} \times a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$.

Et $\frac{1}{\sqrt[3]{a^1}} \times a^2 = a^{-\frac{1}{3}} \times a^2 = a^{-\frac{1}{3}+\frac{6}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$.

Et $\frac{1}{\sqrt[3]{aa}} \times \sqrt[2]{a^3} = a^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{2}} = a^{-\frac{4}{6}} \times a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$.

Et universaliter, ſi $a^{-\frac{m}{n}}$ multiplicare oporteat per $a^{\frac{g}{p}}$, fiat $a^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{mb}{np}}$; & $a^{\frac{g}{p}} = a^{\frac{ng}{np}}$: factum $a^{\frac{ng-mp}{np}}$.

Demonſtratio eadem ex n. 185., 201., & 202.

Regula VII.

De radicalium diviſione per exponentes.

205. **E**Xponens poteſtatis dividentis ſubtrahatur ab exponente dividendæ: reſiduum erit exponens quoti. Quòd ſi quantitates irrationales, quæ in poteſtates imperfectas transformantur, habuerint exponentes fractos diverſæ denominationis, reducentur prius ad eamdem; diviſio enim per ſubtractionem retexit, quod multiplicatio per additionem compoſuit.

Dividere oporteat $\sqrt[2]{a^5}$ per $\sqrt[2]{a^3}$: tranſformentur in poteſtates imperfectas, nimirum $a^{\frac{5}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$ (duo puncta: inter dividendum, & diviſorem ſignum diviſionis exhibent brevitatis causà): quotus erit $a^{\frac{5-3}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1$. Radicalium diviſio.

Sit $\sqrt[2]{a^3} : \sqrt[2]{a^7}$: fiat $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{7}{2}}$: quotus $a^{\frac{3-7}{2}} = a^{-\frac{4}{2}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Et $\sqrt[5]{a^2} : \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$, hoc eſt, $a^{\frac{2}{5}} : a^{-\frac{3}{4}}$, quotus $a^{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}$ (notabis exponentem negativum $-\frac{3}{4}$ in ſubtractione evadere poſitivum $+\frac{3}{4}$); reductiſque fractionibus ad eamdem denominationem, erit quotus $a^{\frac{8}{20}+\frac{15}{20}}=a^{\frac{23}{20}}=\sqrt[20]{a^{23}}$.

Et $\sqrt[2]{a^3}:\frac{1}{\sqrt[2]{a^7}}=a^{\frac{3}{2}}:a^{-\frac{7}{2}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}=a^{\frac{10}{2}}$ $=a^5$ quotus.

Sic $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}:\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{-\frac{3}{4}}:a^{-\frac{2}{3}}$: quotus $a^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=a^{-\frac{9}{12}+\frac{8}{12}}=a^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$.

Et $a^{\frac{9}{4}}:a^2=a^{\frac{9}{4}-2}=a^{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=a^{-\frac{1}{4}}$ $=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$.

Pariter, ſi $a^{-\frac{2}{3}}:a^2=a^{-\frac{2}{3}-2}=a^{-\frac{8}{3}}$ $=\frac{1}{\sqrt[3]{a^8}}$.

Et univerſaliter $a^m:a^n=a^{m-n}$;
$a^m:a^{-n}=a^{m+n}$;
$a^{-m}:a^n=a^{-m-n}$;
$a^{-m}:a^{-n}=a^{-m+n}$;
$a^{\frac{p}{m}}:a^{\frac{g}{n}}=a^{\frac{p}{m}-\frac{g}{n}}=a^{\frac{pn}{mn}-\frac{gm}{mn}}=a^{\frac{pn-gm}{mn}}$;
$a^{\frac{p}{n}}:a^{-\frac{g}{n}}=a^{\frac{p}{m}+\frac{g}{n}}=a^{\frac{pn+gm}{mn}}$;
$a^{-\frac{p}{m}}:a^{\frac{g}{n}}=a^{-\frac{pn-gm}{mn}}$;
$a^{-\frac{p}{m}}:a^{-\frac{g}{n}}=a^{-\frac{pn+gm}{mn}}$ &c.

Demon-

Demonſtratio ex n. 185. repetenda; nam ex n. 201., & 202. exponentes poteſtatum ſive negativi, ſive poſitivi, ſive integri, ſive fracti, in progreſſione arithmetica, poteſtates in geometrica progrediuntur: ergo illi pro harum logarithmis rectè habentur: itaque differentia exponentium, quos habent poteſtates ſe mutuò dividentes, erit exponens quoti.

REGULA VIII.

De irrationalium elevatione ad poteſtates ſuperiores.

206. Exponens quantitatis irrationalis expreſſæ per poteſtatem imperfectam, multiplicetur per exponentem poteſtatis illius, ad quam debet elevari.

Exemplo ſit quantitas $\frac{1}{\sqrt[2]{a^1}}$, evehenda ad tertiam poteſtatem, cujus exponens 3: fiat $\frac{1}{\sqrt[2]{a^1}}$ $=a^{-\frac{1}{2}}$; tum $a^{-\frac{1}{2}\times 3}=a^{-\frac{3}{2}}$ tertia poteſtas $=\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}$.

Et univerſaliter $a^{-\frac{m}{n}}$ ad poteſtatem p, ſcribo $a^{-\frac{mp}{n}}$ &c.

RE-

Regula IX.

De radicum extractione ab irrationalibus.

207. Exponens quantitatis irrationalis per potestatem imperfectam expressæ, dividatur per exponentem potestatis, cujus radix quæritur; nam extractio radicum per divisionem retexit, quod formatio potestatum composuerat per multiplicationem.

Extractio radicum.

Itaque $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$; $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4}}$; $\sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}}$; $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$.

Et universaliter radix n quantitatis a^m erit $a^{\frac{m}{n}}$; radix r quantitatis $a^{\frac{m}{n}}$ erit $a^{\frac{m}{nr}}$; radix r quantitatis $a^{-\frac{m}{n}}$ erit $a^{-\frac{m}{nr}}$.

Utriusque regulæ demonstratio pendet ex n. 198., & 199.; nam potestas data utcunque imperfecta, sive negativa, sive positiva, respectu illius, ad quam evehenda est, radix est; & exponentes sunt logarithmi harum potestatum per n. 201., & 202.: ergo exponens potentiæ novæ habebitur per n. 206., si exponens potestatis datæ imperfectæ ducatur in exponentem illius, ad quam debet evehi; vel ex hoc n. exponens radicis obtinebitur, si exponens potestatis datæ dividatur per exponentem radicis datum.

Scho-

Scholion I.

208. Habes hinc originem, & usum tum calculi exponentialis, tum mirifici illius logarithmorum inventi, quod inchoavit Joannes Neperus, perfecit autem Henricus Briggius. Qua in re illud præterea animadvertas velim, logarithmorum inventores non solùm numerorum geometricè proportionalium 1, 10, 100, 1000 &c., indices, sive logarithmos arithmeticè proportionales 0, 1, 2, 3 &c. aptasse, verùm etiam ad numeros istis intermedios, his pariter intermedios logarithmos debita ratione interjectos excogitasse. Sed uberior de logarithmis tractatio alibi habebitur. Hoc loco tantùm eas regulas attigimus, ex quibus calculi exponentialis fundamenta jacta sunt; nam unde, & ex quo fonte inventa profluxerint, mirificè Tyrones delectat, viamque aperit inveniendi.

Scholion II.

209. In calculo exponentiali regulas, quæ spectant ad multiplicationem, divisionemque potestatum, sedulò prospiciant Tyrones restringi oportere ad potestates ejusdem magnitudinis, quæ in serie geometrica progrediantur. Nam, si $a^2 \times b^3$, caveat, ne scribat $a^5 b$, vel $a b^5$; sed scribendum meminerit $a^2 b^3$. Ratio est, quia a, & b habent inæquales va- Monitum.

 lores;

lores; neque earum magnitudinum poteſtates conſtituunt eamdem ſeriem geometricam, quemadmodum 1°. $a^1 . a^2 . a^3 . a^4$ &c.: ubi $a^2 \times a^3 = a^5$. Eadem de cauſa, ſi quantitatem a^4 dividere oporteat per b^2, quotus erit $\frac{a^4}{b^2}$; non autem $ab^{4-2} = ab^2$.

Sed interruptam hac brevi digreſſiuncula perſequamur progreſſionis geometricæ propoſitionum ſeriem, ex quibus alias ex aliis ſubnaſcentes theorias noſſe juvabit.

PROPOSITIO XXV.

210. IN quantitatum continuè proportionalium quotcunque progreſſione, quod fit ex ductu termini primi in ultimum, æquatur facto ex mutuo ductu duorum quorumvis terminorum, ab extremis æqualiter utrinque remotorum. Vel rectangulum ſub extremis æquatur rectangulo ſub duobus quibuslibet intermediis ab extremis utrinque æqualiter diſtantibus.

Dem. Eſto progreſſio geometrica $a.b.c.d.e.f.g.h$, cujus denominator communis m. Per n. 168. quilibet terminus progreſſionis aſcendentis, puta, h, vel g &c., eſt factum ex ductu primi termini in denominatoris poteſtatem cognominem diſtantiæ a primo, hoc eſt, h, vel g, &c. $= am^d$. Rurſum per n. 170. quilibet terminus a, vel b, &c. æqualis eſt

eſt maximo per denominatoris communis poteſtatem diſtantiæ ab ultimo cognominem diviſo, hoc eſt, a, vel b &c. $= \frac{h}{m^d}$. Cum autem diſtantia d ex hypotheſi ſit utrobique eadem, erit rectangulum $\frac{h}{m^d} \times am^d = ah = bg = cf = de$.

Aliter.

Nam in progreſſione geometrica $a.b.c.d.e.f.g.$ &c. erit per n. 174. $a.c::e.g$; & proinde $ag = ce$. Rurſum per eamdem $a.b::f.g$; & hinc $ag = bf$ &c.

Vel expoſita progreſſio transformetur in hanc: $a.am^1.am^2.am^3.am^4.am^5$ &c.: habes $a \times am^5 = am^1 \times am^4 = am^2 \times am^3$.

PROPOSITIO XXVI.

211. IN omni progreſſione geometrica $a.b.c.d.e.f.g$, ſi numerus terminorum ſit impar, productum duorum quorumlibet terminorum, æqualiter hinc inde a medio diſtantium, eſt æquale quadrato medii.

Dem. Nam per n. 176. $\div a.d.g$, vel $\div b.d.f$, vel $\div c.d.e$: ergo $ag = dd$, $bf = dd$, $ce = dd$.

PROPOSITIO XXVII.

212. IN continuè proportionalibus $a.b.c.d.e.f.g$ extremorum rectangulum ductum in semissem numeri terminorum æquatur aggregato rectangulorum omnium æqualium, quod voco R.

Demonstratio consequitur ex prop. 25., & 26. Quare $\frac{1}{2}n \times ag = R$.

COROLLARIUM.

213. HInc complura his similia, quæ fusè persequitur Wallisius, per te ipsum meditaberis, & resolves problemata.

Dato extremorum rectangulo ag, & numero terminorum n, datur rectangulorum aggregatum R.

Dato n, & R, & termino minimo a, datur maximus g.

Dato ag, & R, datur n.

Dato n, & R, & termino maximo g, datur minimus a &c.

SCHOLION.

214. DUo sunt in progressione geometrica continua, quæ præsertim tradi solent, usumque insignem habent in Arithmetica, operationum compendia, duobus problematis comprehensa. Primum est, totius progressionis summam sine continua intermediorum additione invenire: alterum, terminum ultimum,

ultimum, aliumve a primo quantumvis remotum, neglectis intermediis, invenire; quod secundum problema n. 169. & 170. jam resolvimus. Sed nunc utriusque problematis ampliorem resolutionem sequentibus propositionibus aggredior, viasque per Analysim multiplices Tyronibus indicabo, quibus ad eumdem finem perveniant: id eorum ingenium mirificè exercebit, &, quod caput est, eorum in inveniendo acuet sagacitatem. Inventio summæ.

PROPOSITIO XXVIII.

215. IN omni progressione geometrica crescente, ut differentia secundi termini supra primum ad ipsum terminum primum, ita excessus ultimi, seu maximi supra primum, seu minimum est ad summam omnium terminorum, qui ultimum præcedunt.

Sit progressio $\div\div\ a.b.c.d.e$: dico $b-a.\ a::e-a.\ a+b+c+d$.

Dem. Nam propter proportionem continuam data progressio in hanc transformatur $a.b::b.c::c.d::d.e$: ergo per regulas proportionum ut antecedens quodlibet ad suum consequens, ita summa omnium antecedentium ad summam omnium consequentium. Itaque $a:b::a+b+c+d:b+c+d+e$; & invertendo $b:a::b+c+d+e:a+b+c+d$; & dividendo $b-a:a::b+c+d+e-a-b-c-d:a+b+c+d$; hoc est, $b-a:a::e-a:a+b+c+d$.

Aliter.

Aliter.

Multiplicatis namque extremis $b-a$, & $a+b+c+d$, & mediis a, & $e-a$, inter se mutuò respectivè, producta fiunt æqualia; est enim $\overline{b-a}\times\overline{a+b+c+d}=bb+bc+bd-aa-ac-ad$; & $a\times\overline{e-a}=ae-aa$. Constat autem ex notis theorematis $ac=bb$, & $bc=ad$, & $ae=bd$; ac proinde tam $bb-ac$, quàm $bc-ad=o$; & ideo productum extremorum $bd-aa=ae-aa$, quod est productum mediorum: ergo $b-a.a::e-a.a+b+c+d$. Quod erat &c.

Corollarium I.

216. In progressione geometrica ascendente $\div a.b.c.d.e$, ut ipsius denominator unitate mulctatus $m-1$ ad unitatem, ita maximus ejusdem terminus minimo imminutus $e-a$ est ad summam omnium, qui ultimum præcedunt. Cum enim per hyp. & per def. rationis $b.a::m.1$, erit $b-a.a::m-1.1$; est autem per præced. $b-a.a::e-a.a+b+c+d$: ergo $m-1.1::e-a.a+b+c+d$.

Corollarium II.

217. Si communis denominator progressionis sit 2, excessus maximi termini supra minimum adæquat summam omnium terminorum imminutam maximo; si denominator sit 3, excessus ille est duplus; si denominator sit 4, excessus idem erit triplus summæ omnium imminutæ maximo termino; & sic deinceps. Nam per præced. in primo casu erit $2-1:1::e-a:a+b+c+d$; est autem $2-1=1$: ergo $e-a=a+b+c+d$. In secundo casu $3-1:1::e-a:a+b+c+d$; est autem $3-1=2$: ergo $e-a=2\times\overline{a+b+c+d}$; ac proinde $\frac{e-a}{2}=a+b+c+d$ &c.

Scholion I.

218. Habes jam artificium omnium commodissimum inveniendi summam progressionis. Nam I. summam omnium, qui ultimum, idest, maximum præcedunt, invenies per n. 215. II. Maximum verò imminutum minimo invenies per n. 216., & 217.

Scholion II.

Si progressio sit descendens, erit eadem ordine retrogrado consideranda ad instar progressionis ascendentis.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

219. IN omni progreſſione geometrica, ſi differentia maximi termini ſupra minimum dividatur per communem denominatorem unitate mulctatum, quotiens erit omnium ſumma maximo termino imminuta.

Eſto progreſſio $\div a . am^1 . am^2 . am^3 . am^4$, cujus exponens m: dico quotum $\frac{am^4 - a}{m - 1} = a + am^1 + am^2 + am^3$.

Dem. Inſtituatur analytica diviſio: emerget quotus, qui aſſeritur in propoſitione.

Aliter.

Sit progreſſio $\div a . b . c . d . e$, cujus denominator m: dico $\frac{e - a}{m - 1} = a + b + c + d$.

Dem. Ponatur $\frac{e - a}{m - 1} = y$: erit $e - a = my - y$; ac proinde $e - a . y :: m - 1 . 1$; atqui per n. 216. $e - a . a + b + c + d :: m - 1 . 1$: ergo $e - a . a + b + c + d :: e - a . y$; atque hinc $a + b + c + d = y = \frac{e - a}{m - 1}$. Quod erat &c.

Co-

COROLLARIUM I.

220. SUmma omnium terminorum progreſſionis geometricæ imminuta maximo termino, & ducta in illius denominatorem unitate mulctatum, efficit productum æquale maximo ejuſdem termino imminuto minimo.

COROLLARIUM II.

221. SI exceſſus maximi termini ſupra minimum in progreſſione geometrica dividatur per ſummam omnium terminorum imminutam maximo, quotus erit denominator progreſſionis unitate mulctatus.

PROPOSITIO XXX.

222. IN omni progreſſione geometrica, ut duorum maximorum terminorum differentia ad maximum terminum, ita exceſſus maximi ſupra minimum ad omnium ſummam mulctatam minimo.

Sit rurſus progreſſio $\div a . b . c . d . e$: dico $e - d . e :: e - a . b + c + d + e$.

Dem. Nam multiplicatis extremis, & mediis producta fiunt æqualia; hoc eſt $\overline{e - d} \times \overline{b + c + d + e} = be + ce + de + ee - bd - cd - dd - ed$. Jam verò $de - de = o$, & $ce = dd$, & $be = cd$; ac proinde $ce - dd = o$,

$=o$, & $be-cd=o$: hinc facta reductione $\overline{e-d}\times\overline{b+c+d+e}=ee-bd$ rectangulo extremorum. Rursum $e\times\overline{e-a}=ee-ae$; est autem $ae=bd$: ergo $ee-ae=ee-bd$: ergo $e-d.e::e-a.b+c+d+e$. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

223. IN omni progressione geometrica, ut denominator unitatè mulctatus ad seipsum integrum, ita excessus maximi supra minimum ad omnium summam imminutam minimo.

Progressionis ascendentis $\div a.b.c.d.e$ sit denominator m: erit $m-1.m::e-a.b+c+d+e$. Nam, quia per hypothesim $\frac{e}{d}=m$, erit $e.d::m.1$; ac proinde $e-d.e::m-1.m$; est autem per præced. $e-d.e::e-a.b+c+d+e$: ergo $m-1.m::e-a.b+c+d+e$.

COROLLARIUM II.

224. SI summa omnium terminorum progressionis minimo termino diminuta, per illius denominatorem unitate mulctatum multiplicetur; & productum per eumdem denominatorem integrum dividatur, quotus erit maximus terminus mulctatus minimo.

LEM-

LEMMA.

225. IN continuè proportionalibus, ut terminus primus ad secundum, hoc est, ut 1 ad rationis communis exponentem m, sic summa omnium terminorum præter ultimum ad summam omnium præter primum.

Dem. Nam, si $\div a.b.c.d.e$, erit $a.b::b.c::c.d::d.e$: itaque $a+b+c+d=s-e$ summa omnium præter ultimum; & $b+c+d+e=s-a$ summa omnium præter primum: itaque ex regulis proportionum $a.b::1.m::s-e.s-a$.

PROPOSITIO XXXI.

226. SI terminus maximus in communem denominatorem, seu multiplicatorem ducatur; & ex producto auferatur terminus minimus; residuumque per eumdem multiplicatorem communem unitate diminutum dividatur, quotiens exhibet totius progressionis summam.

Inventio summæ.

Dem. Sit data progressio $\div a.am^1.am^2.am^3.am^4.am^5$: dico $\frac{am^5\times m-a}{m-1}=\frac{am^6-a}{m-1}=s$. Nam facta divisione analytica quantitatis am^6-a per quantitatem $m-1$, quotientis loco prodibit series exposita $a+am^1+am^2+am^3$ &c., hoc est, quantitas s, sive omnium terminorum summa.

Aliter.

Aliter.

Si $\div$ $a.b.c.d.e$, & exponens communis m, erit per lemma $s-e.s-a::1.m$: hinc $sm-em=s-a$; & $sm-s=em-a$; & $s=\frac{em-a}{m-1}$. Quod erat &c.

Hoc theoremate utuntur ferè omnes Arithmetici in geometricæ progressionis summa investiganda.

Exemplum I.

227. IN adjuncta progressione decem terminorum ducatur terminus ultimus 39366 in communis rationis exponentem 3; sive, quod eòdem recidit, progressio per unum adhuc gradum continuetur: fiet 118098. Ab hoc producto dematur 2 terminus primus: residuum erit 118096. Hic numerus per communis rationis exponentem unitate mulctatum $3-1=2$ divisus quotientem exhibet 59048 totius progressionis summam, uti constat ex formula $s=\frac{em-a}{m-1}$.

2	0
6	1
18	2
54	3
162	4
486	5
1458	6
4374	7
13122	8
39366	9
59048	

Exemplum II.

228. CUm autem res tædio plena videri posset in prolixioribus saltem progressionibus singulos terminos continua multiplicatione singillatim investigare, hujus operationis compendium docent propositiones 18, 19, 20, 21, nimirum quo pacto progressionis cujusvis inchoatæ terminum ultimum, aliumve a primo valde remotum invenire oporteat.

Itaque in exposita progressione sit inveniendus terminus decimus 39366: per aliquot saltem gradus eadem inchoetur $\overset{0}{2}$, $\overset{1}{6}$, $\overset{2}{18}$, $\overset{3}{54}$, quibus respondent indices distantiæ a primo 0, 1, 2, 3. Hac præparatione facta, si terminorum jam inventorum quilibet multiplicetur vel in se, vel in eorum alium quemlibet; & productum per terminum primum dividatur, prodibit terminus ille, cui respondet index, ex invicem multiplicatorum indicibus additis conflatus. Quare ducto 54 in 54, termino quarto in se ipsum, cui index 3, gignitur 2916: quem numerum si per terminum primum 2 dividamus, proveniet 1458 terminus septimus, cujus index $6=3+3$. Deinde, si 1458 terminus septimus jam inventus, cujus index 6, ducatur iterum in 54, cujus index 3, prodibit 78732; qui numerus, divisus per 2 terminum primum, exhibet 39366 terminum decimum, cujus index $9=6+3$. Et sic deinceps, quo-usque opus fuerit, progressio per saltus continuabitur.

Est autem hæc regula de terminis remotioribus intermediis quasi per saltum inveniendis, ipsissimum fundamentum, ex quo dependet mirificum illud logarithmorum inventum, cujus specimen dedimus.

EXEMPLUM III.

229. NOtissimum aliud hujusmodi exemplum libet adjungere. Sint in equi cujusdam calceis singulis sex clavi, adeoque in omnibus 24; & venum expositus equus ea lege sit, ut emptor pro primo clavo denarium solvat, pro secundo duos, pro tertio 4; & sic deinceps singulorum clavorum pretium continuè duplicando. Quæritur, quanti emendus est equus?

Constituantur primò continua multiplicatione numeri aliquot primores, puta, sex 1, 2, 4, 8, 16, 32, quorum indices 0, 1, 2, 3, 4, 5: ducto itaque in se ipsum 32 termino sexto, cui index 5, factum erit 1024. Cum autem progressio isthæc ab unitate incipiat, omittenda erit divisio hujus facti per terminum primum 1, uti ostendimus in n. 185.; & propterea 1024 terminus ille est, cui convenit index $10 = 5 + 5$, nempe undecimus. Ille autem in se ductus producit eadem ratione terminum vicesimum primum, quia $10 + 10 = 20$: hic autem ductus in 16 terminum quartum post primum, & cui index 4, producit terminum, cui index $24 = 20 + 4$; qui quidem terminus in progressione geometrica incipiente ab unitate cum sit ordine vicesimus quintus; adeoque clavi ultimi, nempe vicesimi quarti pretium exhibeat uno adhuc gradu auctum; hinc si auferatur terminus primus 1, numerus residuus 16777215 (qui cum per communem multiplicatorem unitate minutum, nempe $2 - 1 = 1$ dividendus sit, hac divisione non immutatur) est ipse numerus denariorum, quibus emendus est equus.

Sin adhuc continuanda foret progressio, id eodem modo fiet. Atque hinc abundè liquet, ad quam immensam, & planè incredibilem summam ab exiguis principiis in continua progressione geometrica perveniatur.

PROPOSITIO XXXII.

230. SI terminus maximus multiplicetur in secundum progressionis terminum; & ex producto auferatur quadratum primi; residuumque per terminum secundum mulctatum primo dividatur, quotiens exhibet totius progressionis summam.

Inventio summæ.

Dem. Sit rursus exposita progressio $a . am^1 . am^2 . am^3 . am^4 . am^5$: fiat $am^5 \times am = am^6$; & ex hoc producto auferatur aa; & residuum $am^6 - aa$ dividatur per $am - a$: quotiens $\frac{am^6 - aa}{am - a} = s$. Nam ex ipsa operatione

analytica

analytica prodibit quotientis loco series $a . am^1 . am^2$ &c.

Aliter.

Per n. 225., si $\div\!\div a . b . c . d . e$, erit $s - e . s - a :: a . b$; adeoque $sb - eb = sa - aa$

$$sb - sa = eb - aa$$

$$s = \frac{eb - aa}{b - a}.$$

Corollarium.

231. Ex formula universali n. 222. facilè quivis per Analysim resolvere poterit ea, quæ subjicio, problemata, & alia pleraque his similia.

I. Datis maximo termino e, & minimo a progressionis geometricæ, ejusque denominatore communi m, datur terminorum omnium summa; nimirum $s = \frac{em - a}{m - 1}$ ex n. 222.

Vel ex n. 219. $s = \frac{e - a}{m - 1} + e$.

II. Datis extremis a, & e progressionis geometricæ, ejusque summà, datur communis denominator m. Nam $s = \frac{em - a}{m - 1}$: hinc $m = \frac{s - a}{s - e}$.

Vel per n. 221. $m = \frac{e - a}{s - e} + 1$.

III. Datis termino minimo, denominatore communi, & terminorum omnium summà a, m, s, datur maximus e, quem ex eadem formula $s = \frac{em - a}{m - 1}$ elicies.

Vel per n. 224. $e = \frac{\overline{s - a} \times \overline{m - 1}}{m} + a$.

IV. Datis denominatore progressionis geometricæ, ejusque summà, & maximo termino m, s, e datur minimus a, quem ex formula $s = \frac{em - a}{m - 1}$ obtinebis.

Vel per n. 220. $\overline{s - e} \times \overline{m - 1} = e - a$: ergo $a = e - \overline{s - e} \times \overline{m - 1} = s + em - sm$.

V. Datis minimo termino, denominatore communi, & terminorum numero a, m, n, datur terminorum omnium summa. Nam per n. 181. $e = am^d$; cum autem $d = n - 1$, & $d + 1 = n$, erit $em = am^{d+1} = am^n$. Jam verò ex formula $s = \frac{em - a}{m - 1}$ dabitur $s = \frac{am^n - a}{m - 1}$.

VI. Datis termino minimo, denominatore communi, & progressionis summà a, m, s, datur numerus terminorum n. Nam per n. III. præced. $sm - s + a = em = am^n$; adeoque $\frac{sm - s + a}{a} = m^n$. Quærendum igitur, quota potestas exponentis communis rationis m æquetur

m æquetur quantitati cognitæ $\frac{sm - s + a}{a}$.

VII. Datis termino minimo, progressionis summà, & numero terminorum a, s, n, datur communis denominator m. Nam ex præced. n. VI. formulà $sm - s + a = am^n$ infertur $\frac{s}{a} m - m^n = \frac{s - a}{a}$, cujus æquationis radix est m quæsitus denominator.

VIII. Datis denominatore communi, numero terminorum, & summà progressionis m, n, s, datur minimus a ex eadem formula $sm - s + a = am^n$; hoc est, $sm - s = am^n - a$; $\frac{sm - s}{m^n - 1} = a = \frac{m - 1}{m^n - 1} s$.

IX. Dato termino maximo, exponente communi, & numero terminorum e, m, n, datur summa progressionis s. Nam per n. 182. $a = \frac{e}{m^d}$: ergo per n. 226. $s = \frac{em - a}{m - 1} = \frac{em - \frac{e}{m^d}}{m - 1}$ $= \frac{em^{d+1} - e}{m^{d+1} - m^d} = \frac{em^n - e}{m^n - m^d}$.

X. Datis termino maximo, denominatore communi, & progressionis summà e, m, s, datur numerus terminorum n. Nam per n. IV. præced. $a = em + s - sm$; adeoque $\frac{e}{em + s - sm} = \frac{e}{a} = m^d$ per n. 182. Quærendum itaque, quota potestas exponentis datæ rationis m æquatur datæ quantitati $\frac{e}{em + s - sm}$: quippe

quippe istius potestatis index unitate auctus est quæsitus numerus terminorum $n = d + 1$.

XI. Datis termino maximo, progressionis summà, & numero terminorum e, s, n, datur denominator communis m. Est enim per n. IX. præced. $s = \frac{em^n - e}{m^n - m^d}$

$$sm^n - sm^d = em^n - e$$

$$e = sm^d - sm^n + em^n$$

$$\frac{e}{s - e} = \frac{s}{s - e} m^d - m^n;$$ cujus æquationis radix m est exponens quæsiti denominatoris.

XII. Datis denominatore communi, numero terminorum, & progressionis summà m, n, s, datur terminus maximus e. Est enim, ut in n. XI. præced. $sm^n - sm^d = em^n - e$

$$\frac{sm^n - sm^d}{m^n - 1} = e.$$

Atque his similia, quæ plura congerit Wallisius, ex datorum multiplici combinatione concinnabis problemata exercendo ingenio aptissima.

De progressione geometrica infinita.

Quàm facilis sit a progressione finita ad infinitam transitus demonstrat P. Taquet lib. 5. cap. 4. Arith. pract.; miraturque priores Arithmeticos, qui progressiones finitas tenerent, infinitas ignorasse, cum hæ ab illis immediatè dependeant.

De-

Definitio.

232. Infinitesima, seu quantitas infinitè parva est particula, quæ minor est quavis data quantitate; atque adeo illi incomparabilis.

Corollarium.

233. Infinitesima itaque respectu quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda; si enim negligitur, error committitur quocunque assignabili minor, hoc est, nullus.

Axioma.

234. In progressione geometrica in infinitum descendente devenitur ad terminum adeo exiguum, ut penitus evanescat, & fiat zero æqualis.

Sit progressio ∺ $4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$ &c. in infinitum descendens: devenietur utique ad terminum infinitè parvum, qui erit 1 divisus per potestatem infinitè magnam denominatoris 2; perspicuum est autem quotientem ejusdem numeratoris divisi per denominatorem continuò crescentem decrescere pari proportione. Quare, si denominator sit infinitè magnus, quotiens erit infinitè parvus, ita ut pro nihilo in calculo considerari possit.

PRO-

Propositio XXXIII.

235. Si progressio geometrica descendendo continuetur in infinitum, ut duorum terminorum maximorum differentia est ad secundum terminum, ita primus, seu maximus est ad reliquam infinitorum terminorum summam, quam voco s.

Dem. Sit data progressio $4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$ &c.: dico $4 - 2 . 2 :: 4 . s$. Nam per n. 215. in progressione finita, ut maximorum terminorum differentia est ad terminum secundum, ita primus, seu maximus dempto minimo est ad summam reliquorum. Quare, cum in progressione descendendo in infinitum continuata minimus terminus evanescat per axioma, erit, ut duorum maximorum differentia ad secundum, ita primus, seu maximus ad reliquam infinitorum summam. Itaque in exposita progressione erit $4 - 2 . 2 :: 4 - 0 . s$; & consequenter $s = 4$; adjectoque maximo 4, erit totius progressionis in infinitum descendentis summa totalis $= 8$.

Propositio XXXIV.

236. Si progressio quæcunque geometrica descendendo in infinitum continuetur, ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem, ita primus, seu maximus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam.

Dem. Sit progressio $4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$ &c.

in

in infinitum continuata, cujus denominator communis 2 : dico 2 — 1 . 1 :: 4 . s. Nam per n. 216. in progreſſione finita, ut denominator unitate mulctatus eſt ad 1, ſic primus, ſeu maximus dempto minimo eſt ad ſummam reliquorum. Quare, cum in progreſſione decreſcente in infinitum minimus evaneſcat per Ax., erit 2 — 1 . 1 :: 4 — 0 . s; adeoque $s = 4$; adjectoque maximo, fiet totius progreſſionis ſumma $= 8$.

COROLLARIUM.

237. IN progreſſione geometrica in infinitum decreſcente in ratione dupla, puta, $\frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32}$ &c., primus, ſeu maximus terminus reliquorum infinitorum ſummæ æqualis eſt; hoc eſt, $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c.

Si decreſcat in ratione tripla $\frac{1}{3} . \frac{1}{9} . \frac{1}{27} . \frac{1}{81}$ &c., maximus terminus eſt duplus: ſi in ratione quadrupla, eſt triplus ſummæ reliquorum infinitorum; & ſic deinceps.

Patet ex præced.

PROPOSITIO XXXV.

238. SI maximus terminus progreſſionis geometricæ in infinitum decreſcentis per ipſius denominatorem unitate mulctatum dividatur, quotus erit ſumma omnium infinitorum maximo termino diminuta.

Dem. In progreſſione geometrica finita decreſcente $a . b . c . d . e$, cujus denominator m, per

n. 219., ſi differentia maximi ſupra minimum dividatur per communem denominatorem unitate mulctatum, quotiens eſt ſumma omnium maximo termino imminuta, nimirum $\frac{a - e}{m - 1} = b + c + d + e$; cum autem in progreſſione in infinitum decreſcente minimus terminus evaneſcat, erit $\frac{a}{m - 1} = b + c + d + e$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM.

239. SUmma progreſſionis geometricæ in infinitum decreſcentis maximo ipſius termino diminuta, ſi per denominatorem unitate mulctatum multiplicetur, maximus ejuſdem terminus efficitur.

Et viciſſim, ſi maximus terminus ejuſdem progreſſionis dividatur per ſummam totius progreſſionis maximo imminutam, quotus eſt denominator communis unitate mulctatus.

PROPOSITIO XXXVI.

240. SI progreſſio geometrica in infinitum continuetur deſcendendo, erit, ut duorum maximorum differentia ad terminum maximum, ita maximus ad omnium ſummam.

Dem. ex n. 222., ſublato minimo, qui evaneſcit per axioma in progreſſione infinita.

Co-

Corollarium I.

241. In progressione infinita descendente maximus terminus est medius proportionalis inter differentiam duorum maximorum, & totam progressionis summam.

Corollarium II.

242. Hinc, si quadratum maximi termini dividatur per differentiam duorum maximorum, quotus erit summa totius progressionis.

PROPOSITIO XXXVII.

243. In progressione geometrica in infinitum decrescente $\div\!\div a . b . c . d . e$ &c., ut denominator $m - 1$ unitate mulctatus ad seipsum integrum m, ita maximus progressionis terminus a ad totam infinitorum terminorum summam; hoc est, $a . a + b + c + d$ &c. $:: m - 1 . m$.

Dem. ex n. 223., evanescente minimo in progressione infinita.

Corollarium I.

244. Si summa progressionis geometricæ in infinitum descendentis multiplicetur per illius denominatorem unitate mulctatum; & productum per ipsum denominatorem dividatur, quotus erit maximus ipsius terminus.

Corollarium II.

245. Et rursum, si maximus terminus per progressionis denominatorem multiplicetur; & productum per eumdem unitate mulctatum dividatur, quotus erit totius infinitæ progressionis summa.

PROPOSITIO XXXVIII.

246. Datis maximo termino a progressionis geometricæ in infinitum decrescentis, ejusque denominatore m, summam invenire.

Invenies per n. 238. $\frac{a}{m - 1} + a$ esse summam totius progressionis quæsitam.

Vel per præced. erit $\frac{am}{m - 1}$ summa totius progressionis.

PROPOSITIO XXXIX.

247. Datis duobus primis terminis a, & b, summam totius progressionis in infinitum descendentis invenire.

Per n. 242. invenies $\frac{aa}{a - b}$ esse summam quæsitam.

CAPUT QUINTUM.

De Compositione rationum.

SEquitur compositio rationum, argumentandi genus Geometris, & Analystis usitatissimum. Hæc autem postrema pars eò accuratiùs tractanda nobis erit, quò magis necessaria est iis, qui ad sublimiorem, ut vocant, Geometriam pervenire contendunt, & Tyronibus captu difficilior videri solet, ea fortasse de causa, quam affert Wallisius tom. 2. Alg. cap. 20. Diversæ quippe hac in re a Scriptoribus loquendi formulæ usurpatæ, inquit ipse, errandi, aut rem ipsam perperam intelligendi ansam præbuerunt.

SYNOPSIS.

RAtionis compositæ definitio vel per multiplicationem exponentium, vel per multiplicationem terminorum ejusdem rationis, quæ componi debet. Utraque notio in Euclidæam recidit. Antevertitur æquivocatio propter duplicem compositionem rationis a Geometris usurpatam, alteram per additionem, alteram per multiplicationem. Cur rationum imminutionem non pariter definiverint Geometræ, atque compositionem. Euclidæa argumentatio ex æquo compositionem rationis per multiplicationem respicit. Explicantur geometricæ formulæ rationum compositarum in comparandis planis, & solidis. Quævis ratio simplex concipi potest velut composita ex pluribus. Invenire quotlibet proportiones datam componentes. Compositio rationis geometrica, & arithmetica. Methodus inveniendi rationem compositam ex quibuscunque, & quotcunque rationibus datis; & ex pluribus datis, præter unam, inveniendi componentem incognitam: hinc Regulæ Arithmeticæ. Affinitas rationum, & fractionum. Compositio rationum, quarum rationes componentes sint invicem similes, seu æquales. Expressiones generales analyticæ. Inter duos datos terminos invenire quotlibet medios proportionales.

DEFINITIO I.

248. RAtio composita sic ab Euclide definitur def. 5. lib. 6. elem.: *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando illius exponens ex horum exponentibus inter se multiplicatis conficitur.*

Clavius sic vertit: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Utraque eòdem recidit; nam, quia denominator, seu exponens cujuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem, dici solet propterea denominator a Geometris quantitas proportionis. Vult igitur hæc definitio proportionem aliquam ex duabus

duabus pluribusve proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu effecerint illius proportionis quantitatem, seu exponentem. Ut proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla, quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12 producitur ex multiplicatione exponentis duplæ proportionis in exponentem sextuplæ; sic eadem proportio duodecupla componi dicitur ex tripla, & quadrupla; nam $3 \times 4 = 12$.

Compositio per multiplicationẽ exponentium.

Similiter, si exponens rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & exponens rationis $\frac{c}{d}$ fuerit n, ratio, cujus exponens est productum mn, erit composita ex rationibus $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

Corollarium.

249. Ut igitur determinetur ratio ex datis quibuscunque rationibus composita, quærendi sunt illarum exponentes, iique inter se mutuò sunt multiplicandi; quod enim inde oritur productum, erit exponens rationis compositæ.

De-

Definitio II.

250. Ratio composita duplici modo a Scriptoribus definiri solet, vel per productum exponentium, uti antea declaratum est, vel per productum eorundem terminorum, quibus exprimuntur datæ rationes, idest, per factum omnium antecedentium, & omnium consequentium.

Utrumvis dicatur, perinde est. Rem exemplis declaro, ne Tyrones decipiantur novitate vocum. Sint duæ rationes 4.2, & 9.3: ducatur antecedens primæ in antecedens secundæ rationis $4 \times 9 = 36$, & consequens primæ in consequens secundæ $2 \times 3 = 6$: hæc nova, quæ emergit ratio 36.6, dicitur ratio composita; & primæ duæ rationes vocari solent componentes.

Vel per multiplicationem terminorũ rationis datę.

Similiter, si trium rationum 4.2, & 9.3, & 8.2 tres termini antecedentes, & tres consequentes inter se multiplicentur, prodibit ratio 288.12 composita ex illis tribus.

Sic etiam, si inter se multiplicentur plures rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, earum productum $\frac{ace}{bdf}$ vocatur ratio ex tribus composita.

Quòd autem hæc expressio rationis compositæ non differat ab Euclidæa definitione, facilè constare potest ex ipsa definitione rationis, sive ejusdem exponentis, qui exprimitur ad instar quotientis antecedentis termini per

 con-

consequentem divisi; vel ulteriùs declarari potest in hunc modum: sint duæ rationes $a.b$, & $c.d$: exponens primæ sit m, & secundæ sit n: dico exponentem compositæ $\frac{ac}{bd} = mn$. Nam prima ratio $a.b$ in hanc transformari potest $bm.b$; & secunda $c.d$ in hanc $dn.d$: ratio ex utrisque composita $\frac{bdmn}{bd} = mn = \frac{ac}{bd}$. Itaque exponens rationis compositæ per multiplicationem terminorum, quibus exprimuntur datæ rationes, semper æquatur producto denominatorum rationum componentium.

Utraque eòdem recidit.

Quare universè ratio composita sic etiam definiri poterit: si antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam ipsarum consequentes $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ inter se mutuò respectivè multiplicentur, producta, quæ inde fiunt, ABD, & abd erunt inter se in ratione composita ex illis omnibus datis rationibus.

Corollarium I.

251. Itaque ut determinetur exponens rationis compositæ ex pluribus rationibus datis, multiplicandi sunt inter se mutuò ipsarum antecedentes termini ex una, & earumdem consequentes ex altera parte. Fractio orta ex his productis, rationem quæsitam compositam determinabit.

Mo-

Monitum.

252. Sedulò autem prospiciant Tyrones, ne vocum similitudine in errorem inducantur, duplicem apud Euclidem, omnesque Geometras, occurrere compositionem rationis, alteram per additionem def. 14. lib. 5., alteram per multiplicationem def. 5. lib. 6. Priori loco esto simplex ratio A ad a, cujus exponens est $\frac{A}{a}$: ratio, quæ componendo fit, erit $A + a$ ad a, cujus exponens est $\frac{A+a}{a} = \frac{A}{a} + 1$; & quidem, si pro antecedente $A + a$ ponatur, ut jam alibi docuimus, $\frac{A}{a} + 2$, vel $\frac{A}{a} + \frac{1}{2}$, quod inter demonstrandum passim occurrit, etiamnum de eadem compositione per additionem sermo erit, nisi quòd exponens rationis compositæ modò sit $\frac{A}{a} + 2$, modò $\frac{A}{a} + \frac{1}{2}$: quæ est rationum compositio per additionem exponentium, meritoque dicenda est rationum additio.

Duplex compositio.

Per additionem.

At verò ea compositio, de qua nunc agitur, cum fiat per multiplicationem exponentium, dicenda potius est rationum multiplicatio. Cum autem apud probatos Auctores occurrat utroque sensu eadem vox compositio, ad tollendam ambiguitatem, alteram vocamus compositionem per additionem, alteram per multiplicationem. Sic ex dupla, & tripla addendo

Per multiplicationē.

com-

componetur quintupla ratio; ſed multiplicando componetur ſextupla.

Corollarium II.

253. Quemadmodum ratio $\frac{B}{b}$ augetur per multiplicationem ratione $\frac{A}{a}$, fitque $\frac{AB}{ab}$, ſic etiam ratio $\frac{AB}{ab}$ imminui poteſt per diviſionem ratione $\frac{A}{a}$, fitque $\frac{B}{b}$. Cur autem hanc rationum imminutionem non pariter definiverint Geometræ, atque compoſitionem, cauſa eſt, inquit Wallis tom. 1. cap. 30., quoniam id minùs erat neceſſe, cum utrumque per compoſitionem fieri poſſit. Perinde enim eſt rationem $\frac{AB}{ab}$ ratione $\frac{A}{a}$ imminuere, atque cum ratione $\frac{a}{A}$ componere; nam, ſi $\frac{AB}{ab}$ dividatur per $\frac{A}{a}$, idem quotus obtinetur, qui fit multiplicando $\frac{AB}{ab} \times \frac{a}{A} = \frac{AaB}{Aab} = \frac{B}{b}$.

Imminutio rationis.

His ita præmiſſis, reliquum jam eſt, ut fundamentale theorema demonſtrandum aggrediar, & quidem per Analyſim multo expeditiùs, quam demonſtratum fuerit in numeris a Theone, Eutocio, & Vitellione, interprete Clavio, & a P. Taquet in magnitudinibus. Sit itaque

THEO-

THEOREMA.

254. Si duobus quibuſvis terminis A, & F, quotlibet interponamus medios, puta, B, C, D, E, utcunque conſtitutos, nempe, vel omnes majores, vel omnes minores altero, vel utroque, aut partim majores, partim minores, ratio extremorum $\frac{A}{F}$ componitur ex rationibus omnibus intermediis continuè ſumptis, ideſt, primi ad ſecundum, ſecundi ad tertium, & ſic continuè uſque ad ultimum.

Demonſtratur. Nam $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} \times \frac{D}{E} \times \frac{E}{F} = \frac{ABCDE}{BCDEF} = \frac{A}{F}$. Cum enim intermedii termini reperiantur omnes tum infra, tum ſupra interjectam lineam, ſe perimunt, relictis tantùm primo, & ultimo; hoc eſt, denominator proportionis A ad F gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod erat &c.

Exemplo ſint rationes datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, quæ continuentur in hiſce numeris 36.12.6.4.3; vel in his 108.36.18.12.9; vel in his 12.4.2.1$\frac{1}{3}$.1. Ubique enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Ratio primi ad ultimum, quæ duodecupla

decupla

decupla eſt, componitur ex quatuor rationibus intermediis continuè ſumptis, nimirum ex tripla, dupla, ſeſquialtera, ſeſquitertia. Nam denominatores $3, 2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}$ inter ſe multiplicemus $3\times 2=6$; deinde productum $6\times 1\frac{1}{2}=9$; & hunc rurſus numerum procreatum $9\times 1\frac{1}{3}=12$; & ſic deinceps, ſi plures eſſent denominatores: ultimus numerus productus eſt denominator proportionis, quæ ex datis rationibus componi dicitur.

Corollarium I.

255. Hinc ſequitur Euclidis argumentatio ex æquo ordinatè, ut ajunt: Si ſit $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, & $\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$, & $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, erit ex æquo $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\times\frac{C}{D}=\frac{A}{D}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$.

Argumentatio ex æquo.

Pariterque, ut loquuntur, in ordine perturbato, ſi trium A, B, C, totidemque a, b, c, ſit, ut A ad B, ſic (non a ad b, ut prius) b ad c; & ut B ad C, ſic a ad b, erit etiamnum, ut A ad C, ſic a ad c; hoc eſt, ſi $\frac{A}{B}=\frac{b}{c}$, & $\frac{B}{C}=\frac{a}{b}$, erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}$; hoc eſt, $\frac{A}{C}=\frac{a}{c}$. Idemque continget, ſi plures adhuc ſint utrobique termini in ordine perturbato, dummodo intermedii omnes fiant tum antecedentes, tum conſequentes rationum, puta, $ABCD$, & $abcd$; nempe, ſi

ſi $\frac{A}{B}=\frac{b}{c}$, & $\frac{B}{C}=\frac{a}{d}$, & $\frac{C}{D}=\frac{c}{b}$, erit $\frac{ABC}{BCD}=\frac{bac}{cdb}$; hoc eſt $\frac{A}{D}=\frac{a}{d}$.

Atque hæ duæ argumentationes ex æquo, ſive in ordine directo, ſive in ordine perturbato, quæ ab Euclide prop. 22., & 23. lib. 5. demonſtrantur, reſpiciunt illam rationis compoſitionem per multiplicationem, quam nuper definivimus.

Corollarium II.

256. Intelliges jam, quid ſibi velint pleræque geometricæ formulæ rationum compoſitarum, in decernenda præſertim proportione planorum, & ſolidorum inter ſe; puta, cum Euclides lib. 6. prop. 13. demonſtrat æquiangula parallelogramma habere rationem compoſitam ex duabus rationibus, quas duo latera circa unum angulum unius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius.

Formulæ geometricæ rationū compoſitarum.

I. Nihil aliud intelligit, quàm, ſi duæ illæ rationes laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam rationem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet, ut demonſtratum eſt n. 254. Itaque, ſi ratio unius lateris parallelogrammi primi ad unum latus ſecundi fuerit, ut 6 ad 3; ratio verò alterius lateris ad alterum latus, ut 16 ad 4, nihil aliud eſt intelligendum, quàm, ſi ſumantur tres numeri 24, 12, 3, qui habeant

datas

datas rationes, nempe duplam, & quadruplam, proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eamdem, quam habet primus numerus 24 ad tertium 3, quæ componitur ex dupla 24 ad 12, & quadrupla 12 ad 3; hoc est, ex datis rationibus 6 ad 3, & 16 ad 4, quas inter latera esse diximus.

II. Vel si duarum rationum 6 ad 3, & 16 ad 4 duo antecedentia inter se multiplicentur $6 \times 16 = 96$, & duo pariter consequentia $3 \times 4 = 12$, ratio 96 ad 12 dicetur composita ex rationibus laterum.

III. Vel quia interdum in Geometria valor absolutus figurarum non quæritur, sed tantùm ratio inter ipsas, omissa multiplicatione antecedentium, & consequentium, quæ non rarò solet esse operosa, præsertim in solidis, satìs est rationum componentium multiplicare inter se exponentes, quorum productum dabit exponentem compositæ. Sic in casu proposito, si exponens 2 primæ rationis ducatur in exponentem 4 secundæ rationis, factum 8 demonstrat primam superficiem esse octuplo majorem secundà, quamvis valor absolutus utriusque ignoretur.

COROLLARIUM III.

257. ET universaliter duo facta homogenea ab, & cd, vel abc, & def, vel $abcd$, & $efgh$ &c. habent inter se rationem compositam ex rationibus suarum dimensionum, seu terminorum sese invicem multiplicantium. Nam $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$; & $\frac{abc}{def} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f}$ &c.

COROLLARIUM IV.

258. SI duo facta homogenea habeant aliquas dimensiones æquales, habebunt inter se eam proportionem, quam obtinent reliquæ dimensiones inæquales: sic $\frac{a^2 b}{a^2 c} = \frac{b}{c}$; & $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$.

COROLLARIUM V.

259. QUælibet ratio simplex $\frac{a}{g}$ concipi potest velut composita ex quibuscunque, & quotcunque rationibus pro libito assumptis. Quod ut intelligas, finge me velle, quòd ratio simplex $\frac{a}{g}$ considerari possit tanquam composita ex sex rationibus componentibus: nihil aliud mihi præstandum erit, quàm quod præcipit Theorema; nimirum duobus extremis a, & g interponendi erunt quinque termini medii: quo artificio ratio simplex $\frac{a}{g}$ concipi poterit ad instar compositæ ex sex rationibus $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f} \times \frac{f}{g} = \frac{abcdef}{bcdefg} = \frac{a}{g}$.

Ratio simplex ad instar compositæ.

SCHO-

Scholion.

260. Quamvis hoc artificium, quo fit, ut quævis ratio simplex considerari possit tanquam composita ex tot, quot libuerit, rationibus componentibus, arbitrarium planè sit, tamen hoc non prohibet, quò minus maximi sit usus in resolutione plurium problematum, uti Tyronibus perspicuum fiet, si modò in sublimiori Geometria profecerint.

Corollarium VI.

261. Hæc cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes; idest, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuendi erunt, inquit Clavius lib. 6. def. 5., inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medii quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minùs uno. Ut si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100 & 1 duos numeros ponamus medios hoc modo: 100, 50, 10, 1. Nam extremorum ratio 100 ad 1 componitur ex intermediis tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque, si alios numeros statuas medios hoc modo: 100, 10, 3, 1, componetur eadem ratio 100 ad 1 ex decupla, tripla

Inveni-re quotlibet proportiones datam componentes.

tripla sesquitertia, & tripla; atque ita de reliquis.

Corollarium VII.

262. Postremò neque hoc prætermittendum est, inquit Clavius loco citato, videlicet: quemadmodum ordine positis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum rationum, uti demonstratum est, sic positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, ut quilibet insequens sit suo antecedente major, differentia extremorum coacervatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum: ut hìc 3, 7, 12, 20, 30, 100, 713, differentia inter 3, & 713, quæ est 710, conflatur ex omnibus differentiis $4+5+8+10+70+613=710$.

Compositio rationis geometrica.

Compositio rationis arithmetica.

Problema I.

263. Datis duabus aut pluribus rationibus componentibus, invenire rationem ex his compositam.

Primus modus consequitur n. 250. Sic ratio composita ex $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, & $\frac{e}{f}$, est $\frac{ace}{bdf}$.

Secundus modus viam aperit constructionibus geometricis; & hac de causa Tyronibus diligenter primùm est addiscendus.

Quæratur I. ratio composita ex duabus $\frac{a}{b}$, &

& $\frac{c}{d}$: fiat $a:b::d:\frac{bd}{a}$: quartus proportionalis inventus $\frac{bd}{a}$ denominetur p: erit $\frac{c}{p}$ ratio compoſita ex duabus $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$.

Dem. Nam in ſerie c, d, p ratio $\frac{c}{p}$ eſt compoſita ex duabus $\frac{c}{d}$, & $\frac{d}{p}$ per n. 254.; atqui per conſtructionem $\frac{d}{p}=\frac{a}{b}$: ergo $\frac{c}{p}$ erit ratio compoſita ex duabus $\frac{c}{d}$, & $\frac{a}{b}$. Quod erat &c.

Inventio ſimpliciſſimæ rationis compoſitæ ex pluribus.

Quæratur II. ratio compoſita ex tribus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$: inveniatur, ut ante, ratio $\frac{c}{p}$ compoſita ex duabus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; quare tres datæ rationes revocentur ad duas $\frac{e}{f}$, $\frac{c}{p}$: fiat ergo, ut prius, $e.f::p.\frac{pf}{e}=q$: ratio $\frac{c}{q}$ erit compoſita ex tribus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$.

Dem. Nam in ſerie quantitatum c, d, p, q ratio $\frac{c}{q}$ per n. 254. eſt compoſita ex $\frac{c}{d}$, & præterea ex $\frac{d}{p}=\frac{a}{b}$, & ex $\frac{p}{q}=\frac{e}{f}$ per conſtructionem. Quod erat &c.

Quæratur III. ratio compoſita ex quatuor

tuor

tuor $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$: inveniatur, ut prius, ratio $\frac{c}{q}$ compoſita ex tribus primis $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; tum fiat hæc proportio $g.h::q.\frac{hq}{g}=r$: ratio $\frac{c}{r}$ erit compoſita ex quatuor $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$.

Dem. Nam in ſerie quantitatum c, d, p, q, r ratio $\frac{c}{r}$ per n. 254. eſt compoſita ex rationibus $\frac{c}{d}$, & $\frac{d}{p}=\frac{a}{b}$, & $\frac{p}{q}=\frac{e}{f}$, & $\frac{q}{r}=\frac{g}{h}$ per conſtructionem. Quod erat &c.

Scholion I.

264. HÆc methodus inveniendi rationem compoſitam ex quibuſcunque, & quotcunque rationibus datis, cujus uſus latiſſimè patet in Geometria, eò tandem reducitur, ut inter quantitatem datam, & aliam, quæ invenienda eſt per iteratas analogias, interponantur tales magnitudines, ut rationes magnitudinum interpoſitarum æquales ſemper ſint reſpectivè rationibus datis.

Scholion II.

265. DUas præterea hoc artificium inſignes affert utilitates: prima eſt, quòd expreſſio rationis compoſitæ ex pluribus datis reducitur

ducitur

ducitur ad ſimpliciſſimam, uti vidimus, rationem compoſitam $\frac{aceg}{bdfh} = \frac{c}{r}$. Altera utilitas eſt, quòd hæc ſimpliciſſima expreſſio rationis compoſitæ ex pluribus datis, variari poſſit diverſis modis, iiſdemque ſimillimis, inter quos optio erit illum eligendi, qui commodior videbitur reſolutioni problematis.

Variatio ejuſdem rationis compoſitæ.

Ut autem clariſſimè intelligant Tyrones, quo artificio inveniri poſſint diverſæ, æquivalentes tamen, expreſſiones ſimplices rationis compoſitæ ex pluribus datis, animadvertant velim, quamlibet ex datis quantitatibus in rationibus componentibus pariter datis aſſumi pro libito poſſe pro primo termino rationis compoſitæ, quæ quæritur.

Exemplum I.

266. Datæ ſint rationes componentes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$: ſi pro primo termino rationis compoſitæ quæſitæ velis quemlibet pro libito numeratorem rationum componentium, puta a, analogiæ ita erunt ordinandæ:

I. $c . d :: b . p$;
II. $e . f :: p . q$;
III. $g . h :: q . r$.

Erit $\frac{a}{r}$ ratio compoſita quæſita.

Dem. Nam in ſerie a, b, p, q, r ratio $\frac{a}{r}$ eſt compoſita ex $\frac{a}{b}$, & $\frac{b}{p} = \frac{c}{d}$, & $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$, & $\frac{q}{r} = \frac{g}{h}$ per conſtructionem. Quod erat &c.

Exemplum II.

267. Sin autem pro primo termino rationis compoſitæ quæſitæ eligere velis quemlibet ex denominatoribus rationum componentium datarum, puta b, analogiæ ita erunt inverſè diſponendæ:

I. $d . c :: a . p$;
II. $f . e :: p . q$;
III. $h . g :: q . r$.

Ratio quæſita compoſita erit $\frac{r}{b}$.

Dem. Nam in ſerie r, q, p, a, b erit propter rationes inverſas, $\frac{r}{b}$ ratio compoſita ex $\frac{r}{q} = \frac{g}{h}$, ex $\frac{q}{p} = \frac{e}{f}$, ex $\frac{p}{a} = \frac{c}{d}$, & denique ex $\frac{a}{b}$. Quod erat &c.

Exemplum III.

268. Eodem artificio aſſumi poterit quævis arbitraria magnitudo pro primo, aut ſecundo termino rationis compoſitæ, quæ inquiritur:

quiritur: quod uſui interdum erit & in problematum reſolutione, & in theorematum demonſtratione.

Datis itaque quatuor ſuperiùs expoſitis rationibus componentibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, aſſumatur quantitas arbitraria n pro primo termino quæſitæ rationis compoſitæ; tum analogiæ ex ordine ita erunt inſtituendæ:

I. $a.b::n.p$;
II. $c.d::p.q$;
III. $e.f::q.r$;
IV. $g.h::r.s$.

Ratio, quæ quæritur, compoſita erit $\frac{n}{s}$.

Dem. Nam in ſerie n, p, q, r, s ratio $\frac{n}{s}$ componetur ex $\frac{n}{p}=\frac{a}{b}$, ex $\frac{p}{q}=\frac{c}{d}$, ex $\frac{q}{r}=\frac{e}{f}$, ex $\frac{r}{s}=\frac{g}{h}$. Quod erat &c.

PROBLEMA II.

269. Data ratione $\frac{a}{m}$ compoſita ex pluribus datis præter unam, invenire rationem componentem incognitam.

Hoc eſt, ſi data ratio $\frac{a}{m}$ compoſita ſit ex duabus rationibus, quarum alterutra data ſit, puta, $\frac{c}{d}$, alteram non datam invenire.

Vel

Vel, ſi ratio $\frac{a}{m}$ compoſita ſit ex tribus rationibus, quarum duæ datæ ſint, puta, $\frac{c}{d}$, & $\frac{e}{f}$; vel ſaltem cognita ſit ratio ex duabus datis compoſita $\frac{c}{p}$, invenire tertiam componentem; atque ita de reliquis.

Primus modus. Si data ratio $\frac{a}{m}$ compoſita ſit ex duabus tantùm rationibus, dividenda erit per alteram datam $\frac{c}{d}$ componentem. Si data ratio $\frac{a}{m}$ compoſita ſit ex pluribus rationibus, dividenda erit per rationem $\frac{ce}{df}$ compoſitam ex omnibus datis. In primo caſu quotiens $\frac{ad}{cm}$: in ſecundo quotiens $\frac{adf}{cem}$ erit ratio altera componens, quæ invenienda erat.

Dem. Quotiens inventus $\frac{ad}{cm}$ multiplicetur per rationem datam $\frac{c}{d}$: factum $\frac{acd}{cdm}=\frac{a}{m}$: erit ergo data ratio $\frac{a}{m}$ compoſita ex duabus $\frac{c}{d}$, & $\frac{ad}{cm}$; ſimilique demonſtratione utendum, ſi data ratio compoſita ſit ex pluribus.

Secundus modus. Eſto ratio $\frac{a}{m}$ compoſita

P. III. M ex

ex duabus rationibus, quarum prima $\frac{c}{d}$ data sit, & altera invenienda. Instituatur hæc analogia $c.d::a.p$: erit $\frac{p}{m}$ ratio altera componens quæsita.

Dem. Nam in serie quantitatum a, p, m, ratio $\frac{a}{m}$ composita est ex duabus $\frac{a}{p}$, & $\frac{p}{m}$; atqui per constructionem $\frac{a}{p}=\frac{c}{d}$ est ratio ipsa componens, quæ data est: ergo $\frac{p}{m}$ erit altera quæsita.

Vel aliter analogia institui poterit, nimirum $d.c::m.q$: erit $\frac{a}{q}$ ratio altera componens, quæ quæritur.

Dem. Nam in serie quantitatum a, q, m, ratio $\frac{a}{m}$ composita est ex duabus $\frac{a}{q}$, & $\frac{q}{m}$; atqui per constructionem $\frac{q}{m}=\frac{c}{d}$: ergo $\frac{a}{q}$ erit ratio altera componens quæsita.

Sin autem ratio $\frac{a}{m}$ ponatur composita ex tribus rationibus, quarum duæ datæ sint $\frac{c}{d}$, & $\frac{e}{f}$; & tertiam oporteat invenire, eadem methodo resolvetur problema.

Nam I. duæ rationes datæ componentes $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$

revocentur

revocentur ad simplicissimam rationem ex his compositam $\frac{c}{p}$ per n. 263. II. Instituatur hæc analogia $c.p::a.q$, vel $p.c::m.r$. In primo casu $\frac{q}{m}$ erit tertia ratio componens quæsita. In secundo casu $\frac{a}{r}$ erit eadem tertia quæsita ratio.

Dem. Nam in primo casu propter seriem a, q, m, ratio $\frac{a}{m}$ composita est ex rationibus $\frac{a}{q}$, & $\frac{q}{m}$; atqui per constr. $\frac{a}{q}=\frac{c}{p}=\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$: ergo $\frac{q}{m}$ erit tertia ratio componens quæsita.

In secundo casu propter seriem a, r, m, ratio $\frac{a}{m}$ est composita ex rationibus $\frac{a}{r}$, & $\frac{r}{m}$; atqui per constr. $\frac{r}{m}=\frac{c}{p}=\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$: ergo $\frac{a}{r}$ erit tertia ratio componens quæsita.

Corollarium I.

270. Si rationis compositæ $\frac{a}{m}$ unica componens sit data, eadem methodo invenietur ratio composita ex reliquis rationibus simplicibus, ex quibus ratio $\frac{a}{m}$ componitur.

COROLLARIUM II.

271. EX hac rationum compositione innumeræ consequuntur regulæ arithmeticæ in humano commercio usitatissimæ. Prima sit regula trium composita, quæ ad hoc problema reducitur. Datis rationibus omnibus componentibus rationem aliquam compositam, & dato alterutro terminorum rationis alterius, quæ sit primæ compositæ æqualis, invenire alium ejusdem terminum.

Regulæ arithmeticæ.

Exemplo sit: si libræ $2000 = a$ annis $3 = c$ afferunt lucrum aureorum $100 = e$, libræ 8000 $= b$ annis $12 = d$ quem aureorum numerum x afferent? In hoc exemplo nihil aliud quæritur, quàm numerus aureorum incognitus x, qui ad aureos 100 rationem habeat æqualem rationi compositæ ex duabus componentibus 8000 ad 2000, & 12 ad 3. Quare ita erunt ordinandi termini:

$$2000 \times 3 : 8000 \times 12 :: 100 : x = 1600$$

$$ac : bd :: e : x = \frac{bde}{ac}$$

Altera est regula Societatis composita, quæ hoc pariter problemate comprehenditur.

Datum numerum n dividere in numerum determinatum partium incognitarum, puta, in tres partes x, y, z, hac lege, ut rationes harum partium $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ æquales sint rationibus compositis, quarum rationes componentes datæ sunt, nimirum $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{e}$, & $\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \times \frac{e}{f}$.

Itaque ex suppositione constat I. $x + y + z = n$: II. $x:y::ad:be$, & $y:z::be:cf$; & alternando, & invertendo, $ad:x::be:y::cf:z$. Hinc habes universalem resolutionem, & regulam arithmeticam

$$ad : \frac{adn}{ad+be+cf}$$

$$ad + be + cf : n :: be : \frac{ben}{ad+be+cf}$$

$$cf : \frac{cfn}{ad+be+cf}$$

SCHOLION I.

272. HÆc cursim de regulis arithmeticis; omnis enim hæc, quæ instituitur, inveniendi ratio per calculum litteralem ad scientiam analyticam spectat, cujus fructus amplissimus, idemque jucundissimus est, problemata omnia Matheseos sive puræ, sive mixtæ, ut vocant, resolvere ope calculi, quem si rite assequantur Tyrones, per se ipsi poterunt quæstiones omnes, quæ in humanum commercium cadunt, quantumvis involutas resolvere, quin ad Arithmeticæ regulas confugiendum illis sit.

Scholion II.

273. INtelliges jam nunc multò apertiùs, quod aliàs observavimus, operationes arithmeticas in rationibus, sive earum exponentibus similiter peragendas, atque in fractionibus. Quid enim aliud sunt rationes geometricæ, quàm ipsissimæ fractiones sive propriæ, sive impropriæ, ut vocant.

Itaque I. quemadmodum fractiones non cognomines ad idem nomen reducuntur, hoc est ad communem denominatorem, sic duæ rationes $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$ ad idem consequens revocantur

Affinitas fractionū, & rationū. $\frac{ad}{bd}$, & $\frac{bc}{bd}$. Hæc reductio usitata est, ut in comparandis duabus rationibus multò faciliùs earum inter se proportio deprehendatur; perspicuum est enim duas rationes ad commune consequens redactas eamdem inter se habere rationem, quam habent duo antecedentia.

II. Rationum additio, & subtractio peragitur more fractionum, reductis prius rationibus ad commune consequens.

III. Rationum multiplicatio ad instar fractionum fit, multiplicatis inter se antecedentibus, & consequentibus, vel, quod perinde est, multiplicatis inter se exponentibus, quò habeatur compositæ rationis exponens: sic $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; vel, si $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$, erit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = mn$.

IV.

IV. Rationum divisio vel rursum peragitur more fractorum, vel fit dividendo exponentem compositæ rationis per exponentem dividentis. Qua in re notabis rursum, quemadmodum in fractionibus, ita & in rationibus tantundem esse dividere rationem compositam $\frac{ac}{bd}$ in ratione $\frac{c}{b}$, & multiplicare in ratione huic contraria $\frac{b}{c}$. In utroque casu idem est exponens $\frac{acb}{bcd} = \frac{a}{d}$. Atque hinc est, ut nuper ex Wallisio annotavimus, quòd Euclides contentus fuit definire rationum compositionem per multiplicationem absque alia definitione dissolutionis per divisionem. Quoniam facile dictu est, inquit ipse, si qua fert occasio, multiplicare in ratione subdupla, pro dividere in ratione dupla; idemque sonat componere cum ratione $\frac{b}{c}$, & eximere rationem $\frac{c}{b}$.

De compositione rationum, quarum rationes componentes sint invicem similes, seu æquales.

Definitio I.

274. TRium pluriumve magnitudinum continuè proportionalium, sive crescentium, sive decrescentium, puta, 1, 2, 4, 8 &c., aut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ &c. prima ad tertiam 1

 ad

ad 4, vel 1 ad $\frac{1}{4}$ duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet prima ad secundam 1 ad 2, & 1 ad $\frac{1}{2}$. Rursum prima ad quartam 1 ad 8, vel 1 ad $\frac{1}{8}$ triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet prima ad secundam; & sic deinceps, uno amplius, quandiu proportio extiterit.

Definitio Euclidæa.

Ita Euclides def. 10. lib. 5. Cave autem, ne in harum vocum interpretatione in eum errorem incidas, quem in Federico Commandino, ac plerisque interpretibus Euclidis jure reprehendit Clavius; rationemque duplicatam, triplicatam, quadruplicatam pro dupla, tripla, quadrupla promiscuè usurpes. Quamvis enim, si Grammaticam spectes, dupla, & duplicata tantundem videatur significare, in usu tamen mathematico distingui solent. Nam ratio æqualis, dupla, tripla, quadrupla &c. sunt, ut 1, 2, 3, 4 &c. ad 1; sed ratio simplex, duplicata, triplicata, quadruplicata &c. sunt, ut a, a^2, a^3, a^4 &c. ad 1; quæque jam a recentioribus dici solent radix, quadratum, cubus, quadrato-quadratum &c., ab Euclide definiri censendæ sunt, ubi exponitur ratio simplex, duplicata, triplicata &c.; quæque a recentioribus dici solent potestates, sunt quidem nova nomina, sed non novæ notiones ab eis, quæ ab Euclide afferuntur def. 10. lib. 5.

Quamobrem in serie continuè proportionalium Euclides rationem primæ quantitatis ad tertiam vocat duplicatam ejus rationis, quam habet prima ad secundam, propterea quòd in

eadem

eadem serie inter primam quantitatem, & tertiam reperiatur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam; & sic de cæteris.

275. Recentiorum definitio ad Euclidæa non discrepat, & fortasse Tyronibus accommodatior videri solet; est autem ejusmodi: si in ea per multiplicationem compositione rationum, de qua egimus cap. superiore, rationes componendæ sint invicem similes, seu æquales, illa, quæ componendo oritur, dici solet unius earum duplicata, triplicata &c. pro numero similium rationum sic componentium.

Recentiorum definitio.

Vel ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus; triplicata, quæ ex tribus; quadruplicata, quæ ex quatuor rationibus similibus inter se multiplicatis consurgit; atque ita deinceps.

Sic rationis a ad b, cujus exponens est $\frac{a}{b}$, duplicata, triplicata &c. sunt aa ad bb, aaa ad bbb &c. quarum exponentes sunt $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ &c.; vel, si exponens simplicis sit r, duplicatæ, triplicatæ &c. exponentes erunt rr, r^3 &c.

Quò spectat Euclidæa definitio; nam in serie continuè proportionalium $1 . a . a^2 . a^3 . a^4$ prima

ad

ad tertiam, quartam, quintam eodem ſenſu rationem habere dicitur duplicatam, triplicatam &c. illius, quam habet prima ad ſecundam, hoc eſt 1 ad a; & invertendo, ratio tertiæ, quartæ, quintæ ad primam eſt duplicata, triplicata, quadruplicata illius, quam habet ſecunda ad primam; ideſt, ſi $\frac{1}{a}$, vel $\frac{a}{1}$ ſit exponens ſimplicis, erunt $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, vel $\frac{aa}{1}$, $\frac{a^3}{1}$, $\frac{a^4}{1}$ exponentes duplicatæ, triplicatæ, quadruplicatæ &c.

Corollarium I.

276. Ex his ſequitur non aliud eſſe diſcrimen inter illam compoſitionem rationum, de qua egimus cap. ſuperiore, & hanc duplicationem, triplicationem &c., quàm quòd in hac interjiciuntur rationes omnes æquales; in compoſitione autem rationum non neceſſe eſt interpoſitas rationes eſſe æquales. Multiplicatio tamen exponentium in utroque caſu utilis eſt, ut ſciamus, vel quænam ſit illa ratio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata &c.; vel quæ ex propoſitis rationibus compoſita eſſe dicitur.

Quæratur ratio, quæ ſit duplicata, triplicata rationis decuplæ: ducatur 10×10, vel $10 \times 10 \times 10$, numerus genitus 100, vel 1000 erit exponens rationis, quæ decuplæ duplicata eſt, vel triplicata. Quod, perinde obtinetur, ſi continuentur tres numeri in data ratione hoc modo: 1.10.100, vel 3.30.300; nam ratio 100 ad 1, vel 300 ad 3, quæ centupla eſt, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo ratio 1 ad 100, vel 3 ad 300, quæ ſubcentupla eſt, dicetur duplicata rationis ſubdecuplæ 1 ad 10, vel 3 ad 30.

Corollarium II.

277. Exponens rationis duplicatæ eſt quadratus, triplicatæ cubus; & ſic deinceps.

Corollarium III.

278. Quadrata ſunt in ratione duplicata rationis ſuarum radicum, cubi in ratione triplicata; atque ita de reliquis poteſtatibus.

Definitio II.

279. Sicuti quadratio, cubatio, cæteræque rationum involutiones, hoc eſt, multiplicationes poteſtatum generativæ dicuntur duplicatio, triplicatio &c., ſeu in ratione duplicata, triplicata ſimplicis, ita evolutio hujus involutionis, quæ ſit extrahendo radicem quadraticam, aut cubicam &c., dicitur a Geometris ratio ſubduplicata, ſubtriplicata &c. Ratio ſubduplicata ſubtriplicata &c.

280. Cum autem expreſſiones analyticæ harum rationum a ſcriptoribus deriventur interdum a calculo radicalium, quandoque a calculo exponentiali, de quo ſupra, ut Tyronibus

Tyronibus morem geram, in afferendis exemplis utramque expreſſionem ſequar. Plus enim negotii faceſſunt Tyronibus hæc diverſa ſymbola, ſi iis non aſſueverint, quàm theoremata quantumvis operoſa.

Sic ratio $\frac{a}{b}$ eſt ſubduplicata rationis $\frac{aa}{bb}$, ſubtriplicata rationis $\frac{a^3}{b^3}$, ſubquadruplicata rationis $\frac{a^4}{b^4}$ &c.

Vel rationis $\frac{a}{b}$ eſt ſubduplicata ratio $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}}$, ſubtriplicata $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ &c.; aut, quod eòdem recidit, rationis $\frac{a}{b}$ eſt ſubduplicata ratio $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$, ſubtriplicata $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$ &c.

Rationis $\frac{a^3}{b^3}$ ſubduplicata eſt $\frac{\sqrt[2]{a^3}}{\sqrt[2]{b^3}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$.

Rationis $\frac{a^2}{b^2}$ ſubtriplicata eſt $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$.

Et generatim: ſi ponatur n repræſentare numerum quemcunque integrum, aut fractum, erit I. $\frac{a^n}{b^n}$ expreſſio generalis cujuſcunque rationis compoſitæ ex totidem rationibus æqualibus ipſi

ipſi $\frac{a}{b}$, quot unitates continentur in numero n, quando n repræſentat numerum integrum. II. $\frac{a^n}{b^n}$ erit expreſſio cujuslibet rationis ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ &c. rationis $\frac{a}{b}$, ſi ponatur n ſucceſſivè repræſentare omnes numeros fractos, quorum unitas ſit numerator. III. $\frac{a^n}{b^n}$ erit expreſſio cujuslibet rationis ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ &c. rationis $\frac{a}{b}$ elevatæ ad quamlibet poteſtatem, ſi ponatur n repræſentare numerum quemcunque fractum, cujus numerator æquè ac denominator ab unitate differant.

Generalis expreſſio.

281. Horum trium caſuum expreſſio tribus modis poteſt hac ratione ſeparari.

Primus caſus exprimetur per $\frac{a^n}{b^n}$: ſecundus per $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$: tertius per $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$.

In primo caſu $\frac{a^n}{b^n}$ deſignat rationem compoſitam ex totidem rationibus ſimplicibus æqualibus ipſi $\frac{a}{b}$, quot unitates continentur in numero integro n.

In ſecundo caſu ratio $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ deſignat rationem ſim-

simplicem, quæ, si tot vicibus repetatur, quot unitates continentur in numero integro n, gignit rationem compositam $\frac{a}{b}$; hoc est, ratio $\frac{a^{\frac{1}{3}\times 3}}{b^{\frac{1}{3}\times 3}} = \frac{a^{\frac{3}{3}}}{b^{\frac{3}{3}}} = \frac{a^1}{b^1}$.

In tertio casu $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ est ratio simplex, quæ, si tot vicibus repetatur, quot unitates continentur in numero integro m, gignit rationem compositam $\frac{a^n}{b^n}$; hoc est, ratio $\frac{a^n}{b^n}$ est composita ex tot rationibus simplicibus $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$, quot unitates inveniuntur in numero integro m; nam $\frac{a^{\frac{2}{3}\times 3}}{b^{\frac{2}{3}\times 3}} = \frac{a^{\frac{6}{3}}}{b^{\frac{6}{3}}} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^n}{b^n}$. Hæc tertia expressio rationis $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ designari etiam potest per rationem compositam ex ratione simplici $\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$ tot vicibus repetità, quot unitates continentur in numero integro n; hoc est, $\frac{a^{\frac{1}{m}\times n}}{b^{\frac{1}{m}\times n}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$.

Tria hæc diversarum rationum symbola ad formulam universalem revocari possunt $\frac{a^n}{b^n}$, si ponatur in primo casu n repræsentare numerum quemcunque integrum; in secundo casu fractionem quamcunque, cujus numerator sit semper unitas; in tertio quamlibet fractionem, cujus numerator, & denominator ab unitate differant.

Corollarium IV.

282. Duo facta homogenea similia, si duarum dimensionum sint, habent inter se rationem duplicatam rationis simplicis, quæ est inter eorum dimensiones relativas, triplicatam, si trium, quadruplicatam, si quatuor. Nam, si ab, & cd sint similia; idest, si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, erit $\frac{ab}{cd}$ in ratione duplicata simplicis $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ juxta n. 279.; & sic de reliquis.

Corollarium V.

283. Duo facta homogenea similia sunt inter se, uti potestates tot graduum, quot sunt eorundem dimensiones relativæ. Nam, si ab, & cd sunt similia, erit $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$ &c. Hac de causa, quando producta homogenea sunt similia, dici ferè solet esse inter se, uti quadrata laterum homologorum; vel uti cubi, & potestates

poteſtates tot graduum, quot ſunt dimenſiones relativæ in productis homogeneis ſimilibus.

Corollarium VI.

284. Si duo termini a, & b rationis $\frac{a}{b}$ ſint in ratione ſubduplicata, ſubtriplicata &c. rationis $\frac{c}{d}$, dici ſolet a, & b eſſe inter ſe, uti radices ſecundæ, tertiæ &c. quantitatum c, & d. Quod ita exprimitur: $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[2]{c}}{\sqrt[2]{d}}$, & $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}$ &c.; vel $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}}$ &c.

Et univerſaliter $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, ſi ponatur n repræſentare numerum quemcunque integrum. Nam per ſuppoſitionem ratio $\frac{c}{d}$ componitur ex tot rationibus æqualibus rationi ſimplici $\frac{a}{b}$, quot unitates continet numerus n; atqui per n. 279. ratio eadem $\frac{c}{d}$ eſt pariter compoſita ex tot rationibus æqualibus rationi ſimplici $\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, quot unitates continet numerus n: ergo ratio

ſimplex

ſimplex $\frac{a}{b}$ æquabitur rationi ſimplici $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$.

Corollarium VII.

285. Terminorum continuè proportionaliũ $a.b::c.d::e.f$ &c. poteſtates, vel radices ſub eodem exponente ſunt pariter proportionales, nempe ∺ $a^n . b^n . c^n . d^n . e^n . f^n$. &c.; vel ∺ $a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} . c^{\frac{1}{n}} . d^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{1}{n}} . f^{\frac{1}{n}}$; vel ∺ $a^{\frac{n}{m}} . b^{\frac{n}{m}} . c^{\frac{n}{m}} . d^{\frac{n}{m}}$ &c. Conſtat enim rationes poteſtatum ejuſdem gradus componi ex eodem numero rationum componentium æqualium; & rationes radicum eſſe rationes componentes, quarum rationes æquales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ſunt compoſitæ; & harum quælibet ex eodem numero componitur; & conſequenter rationes componentes ſunt æquales.

Corollarium VIII.

286. Si duæ ſint pluresve progreſſiones continuè proportionales ∺ $a.b.c.d.e.$ &c., & ∺ $g.h.i.k.l.$ &c., facta terminorum correſpondentium ſunt pariter proportionalia ∺ $ag.bh.ci.dk.el.$ &c. Nam rationes $\frac{ag}{bh}$, $\frac{bh}{ci}$, $\frac{ci}{dk}$, $\frac{dk}{el}$ &c. ſunt ſingillatim compoſitæ ex eodem numero rationum æqualium.

Corollarium IX.

287. In omni progressione geometrica $\div a . b . c . d . e . f$ &c. ratio $\frac{p}{q}$, unius ex terminis, quem voco p, ad alium quemcunque, quem voco q, quos inter unicus terminus interjicitur, æqualis erit rationi quadratorum ex duobus terminis se se immediatè consequentibus $\frac{a^2}{b^2}$. Si duo termini interponantur, erit $\frac{p}{q} = \frac{a^3}{b^3}$; si quatuor, erit $\frac{p}{q} = \frac{a^4}{b^4}$; atque ex genere: si ponatur n designare numerum quemcunque terminorum, qui inter duos terminos p, & q progressionis interponuntur, habebitur $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$. Nam $\frac{p}{q}$ est ratio composita ex tot rationibus componentibus æqualibus, quot unitates continentur in numero terminorum interpositorum plus uno.

Problema I.

288. Datæ rationis $\frac{a}{b}$ invenire rationem duplicatam, triplicatam &c.

Resolutio. Termini componentes rationem datam eleventur ad secundam, tertiam, quartam potestatem $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$ &c.

Aliter.

Aliter.

Duorum terminorum a, & b datæ rationis inveniatur tertia, aut quarta continuè proportionalis x, y &c.: erit per n. 274. $\frac{a}{x}$ in duplicata ratione ipsius $\frac{a}{b}$; & $\frac{a}{y}$ in triplicata ejusdem.

Problema II.

289. Datæ rationis compositæ $\frac{a}{b}$ invenire rationem componentem, cujus $\frac{a}{b}$ est duplicata, vel triplicata &c.

Resolutio. A terminis datæ rationis $\frac{a}{b}$ extrahatur radix quadrata, vel cubica &c. $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}}$, vel $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ &c. Et universaliter $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ exprimet rationem, cujus $\frac{a}{b}$ est duplicata, vel triplicata, si ponatur $n = 2$, vel $n = 3$ &c.

 PRO-

PROBLEMA III.

290. Datis in progressione geometrica termino primo, & alio quovis termino, dummodo constet, quem locum in progressione obtineat, invenire secundum, & totam progressionem.

Resolutio. Sit primus a, quartus b, secundus x: per n. 277. primus est ad quartum, ut cubus primi ad cubum secundi. Quare $a . b :: a^3 . x^3$; ac proinde $a x^3 = b a^3$; & per reductionem $x = \sqrt[3]{b a a}$; hoc est, quadratum primi termini ducatur in quartum terminum: radix cubica producti erit secundus terminus quæsitus; atque inde totam seriem facilè invenies ex n. 168. Eodem modo, si primus sit a, quintus b, secundus x, invenies secundum $x = \sqrt[4]{b a^3}$ &c.

PROBLEMA IV.

291. Inter duos datos terminos a, & b, quotlibet medios proportionales invenire.

Resolutio. Si medius dumtaxat proportionalis quæratur x, fiat $\div a . x . b$; ac proinde habes $x = \sqrt{ab}$.

Inventio mediarum proportionalium.

Si inter duas datas quantitates lubeat inquirere duas medias proportionales, quæratur mediarum prima, quæ denominetur x. Quoniam inter a, & b duæ mediæ proportionales constitutæ sunt, quatuor termini conficient progressionem geometricam: itaque per n. 277. $a . b :: a^3 . x^3$; & hinc $x = \sqrt[3]{b a a}$. Inventa duarum mediarum prima, quæ vocetur c, & secunda z, erit $a . c :: c . z$; adeoque $z = \frac{cc}{a}$. Eadem methodo quotlibet medias proportionales invenies.

292. Quamobrem, ut habeas formulam generalem, sint rursus a, & b duæ quantitates datæ; & n exprimat numerum mediarum proportionalium, quæ inquiruntur: perspicuum est, cognità primà mediarum proportionalium, omnes reliquas medias per regulam proportionum facilè inveniri.

Itaque per n. 274., & 277. erit $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$; & hinc $a x^{n+1} = a^{n+1} b$; & dividendo utrinque per a juxta methodum calculi exponentialis, erit $x^{n+1} = \frac{a^{n+1} b}{a} = a^{n+1-1} b = a^n b$: itaque $x^{n+1} = a^n b$; & extrahendo utrinque radicem, cujus exponens sit $n+1$, erit $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

Formula generalis.

Hæc expressio universalis designat, quid facto opus sit, ut inter a, & b inveniatur prima tot mediarum proportionalium, quot libuerit. Quæratur I. unica tantùm media proportionalis inter a, & b: in hoc casu $n = 1$, qua facta substitutione in formula generali $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, evadet $x = \sqrt[2]{ab}$.

Quæratur II. prima duarum mediarum inter a, & b: in hoc casu $n=2$; & per substitutionem generalis formula in hanc transformatur $x=\sqrt[3]{a^2 b}$.

Quæratur III. prima quinque mediarum inter a, & b: $n=5$: & $x=\sqrt[n+1]{a^n b}$: evadet $x=\sqrt[6]{a^5 b}$; atque ita porro de reliquis.

Unicè annotabis, si quando datæ quantitates a, & b sint duo numeri, sæpenumero contingere, ut prima mediarum proportionalium per formulam designata inveniri exactè in numeris non possit: utì mox constabit ex n. 297.

Corollarium I.

293. Si ratio $\frac{a}{b}$ data sit, quæ supponatur composita ex tot rationibus æqualibus, quot exprimit numerus quicunque integer designatus per $n+1$, facilè inveniri poterit ratio componens, cui reliquæ omnes sunt æquales. Nihil est enim aliud præstandum, quàm quærere primam tot mediarum proportionalium inter a, & b, quot unitates continentur in n; & ratio ipsius a ad hanc primam mediam $\sqrt[n+1]{a^n b}$ juxta formulam generalem erit ratio componens, quæ quæritur.

Co-

Corollarium II.

294. Posito quòd n repræsentet numerum quemcunque integrum, si habeatur hæc proportio $a^{n+1} . c^{n+1} :: a . b$, quantitas c erit prima tot mediarum proportionalium inter a, & b, quot n continet unitates. Sequitur ex n. 274.

Corollarium III.

295. Docuimus in præcedenti problemate, qua ratione inveniatur prima tot mediarum proportionalium inter a, & b, quot n continet unitates, si ponatur a esse primam quantitatem, & b ultimam; adeoque $\sqrt[n+1]{a^n b}$ esse primam mediam proportionalem, quæ terminum primum a immediatè consequitur. Jam verò si ponatur b pro prima quantitate, & a pro secunda, reperietur eodem modo prima mediarum proportionalium proximior ipsi b esse $\sqrt[n+1]{a b^n}$. Quare in n.293. supposita ratione $\frac{a}{b}$ composita ex tot rationibus æqualibus, quot $n+1$ continet unitates, invenietur etiam $\sqrt[n+1]{a b^n}$ esse ratio componens æqualis reliquis omnibus, ex quibus $\frac{a}{b}$ est composita. Et in n.294. si $b^{n+1} . c^{n+1} :: b . a$, quantitas c erit prima tot mediarum proportionalium

lium

lium inter b, & a, quot n continet unitates; & præterea hæc eadem quantitas c erit media proximior ipſi b.

Corollarium IV.

296. Quando duæ quantitates a, & b ſunt determinatæ; & numerus n mediarum proportionalium inter a, & b determinatus eſt, etiam quilibet ex terminis mediis, puta, primus $\sqrt[n+1]{a^n b}$ &c., erit pariter determinatus.

Corollarium V.

297. In omni progreſſione numerica, in qua duo quicunque termini aſſumantur a, & b, quos inter habeatur numerus n tot mediarum proportionalium, quot libuerit, ſi $a^n b$, vel per n. 295. ab^n ſit potentia numerica perfecta, cujus exponens $n+1$, in hoc caſu radix $\sqrt[n+1]{a^n b}$, utì pariter $\sqrt[n+1]{ab^n}$, erit numerus, qui radicem exactam deſignabit, hoc eſt, $\sqrt[n+1]{a^n b}$ poteſtatis numericæ $a^n b$, & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ poteſtatis numericæ ab^n; & ratio componens $\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}} = \frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ (æqualis reliquis omnibus, ex quibus componitur $\frac{a}{b}$; & quarum tot

habentur,

habentur, quot unitates in $n+1$) poterit numeris exprimi; nam a, & $\sqrt[n+1]{a^n b}$, utì pariter $\sqrt[n+1]{ab^n}$, & b, numeri ſunt.

Quòd ſi harum quantitatum quælibet $a^n b$, vel ab^n non ſit poteſtas numerica perfecta, cujus exponens $n+1$, in hoc caſu $\sqrt[n+1]{a^n b}$, & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ erunt quantitates incommenſurabiles; & conſequenter incommenſurabiles erunt duo termini rationis componentis $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}$ $= \frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ æqualis reliquis omnibus rationibus, ex quibus componitur ratio $\frac{a}{b}$, quæ totidem ſunt, quot unitates habentur in $n+1$. Omnia conſtant ex n. 293., 294., & 295.

Scholion.

298. Aſſueſcant Tyrones per ſe ipſi caſus particulares hujus V. Coroll. ſibimet confingere; ac ſupponendo n ſucceſſivè æqualem 1, 2, 3 &c., ſubſtituant numeros loco a, & b. Qua in re illud etiam aſſequentur, quòd, quando quadratum eſt duplum, aut triplum alterius, utì etiam cubus &c.; hoc eſt, quando ratio harum poteſtatum eſt $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$,

latus,

latus, seu radix unius est incommensurabilis cum latere, seu radice alterius; nam $\sqrt[2]{2}$ est incommensurabilis cum $\sqrt[2]{1}=1$, utì pariter $\sqrt[3]{2}$ est incommensurabilis cum $\sqrt[3]{1}=1$.

PROBLEMA V.

299. Inter duas magnitudines a, & b elevatas ad quamlibet potestatem a^n, b^n, medias proportionales invenire.

Resolutio, & demonstratio. Designet n numerum integrum quemcunque; datæque magnitudines a, & b ad potestatem n elevatæ intelligantur a^n, b^n.

His positis, fiat series productorum $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$; atque ita porro usque ad $a^{n-n}b^n$: in qua serie potestas a^n gradatim diminuitur, & potestas b^1 gradatim augetur usque ad b^n. Hæc producta conficiunt seriem tot mediarum proportionalium inter a^n, & b^n, quot unitates continentur in $n-1$; nimirum $\div\div\ a^n . a^{n-1}b . a^{n-2}b^2 . a^{n-3}b^3 . a^{n-4}b^4$; atque ita progrediendo usque ad $a^{n-n}b^n = a^0 b^n = b^n$: quod exemplis perspicuum fiet. Ponatur $n=2$, erit $\div\div\ a^2 . ab . b^2$: si $n=3$, erit $\div\div\ a^3 . a^2b . ab^2 . b^3$: si $n=4$, erit $\div\div\ a^4 . a^3b . a^2b^2 . ab^3 . b^4$ &c.

Dem. I. Perspicuum est rationem, quæ in tota progressione regnat, semper esse eamdem $\frac{a}{b}$: ut patet dividendo antecedens quodlibet per suum consequens.

II.

II. Terminos autem medios, cum sint potestates ipsius a, cujus exponens successivè unitate minuitur post primum terminum a^n; & pariter potestates ipsius b, cujus exponens unitate augetur post primum b^1 usque ad b^n, evidens est totidem esse debere, quot unitates continentur in $n-1$: itaque $\div\div\ a^n . a^{n-1}b . a^{n-2}b^2 . a^{n-3}b^3$; atque ita procedendo usque ad $a^{n-n}b^n = b^n$. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

300. Hinc si eorumdem terminorum radices sumantur, quarum exponens sit n, constat haberi hanc progressionem $\div\div\ \sqrt[n]{a^n} = a . \sqrt[n]{a^{n-1}b} . \sqrt[n]{a^{n-2}b^2} . \sqrt[n]{a^{n-3}b^3} . \sqrt[n]{a^{n-4}b^4}$ &c. usque ad $\sqrt[n]{a^0b^n} = \sqrt[n]{1\, b^n} = b$; ac præterea in hac progressione haberi tot medias proportionales inter a, & b, quot unitates continentur in $n-1$. Si $a=1$, progressio præcedens evadet $\div\div\ \sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{b^2} . \sqrt[n]{b^3} . \sqrt[n]{b^4}$ usque ad $\sqrt[n]{b^n} = b$.

CAPUT SEXTUM.

De proportione harmonica.

Est etiam tertia proportionis, & progressionis species, quæ harmonica ab antiquis Geometris dicta est; quippe quæ præcipuas Con-

Consonantiæ Musicæ proprietates exprimit.

SYNOPSIS.

TRium, aut quatuor quantitatum harmonica proportio: Consonantias musicas sæpe refert. Progressio harmonica. Proportiones musicæ interdum in corporum dimensionibus. Exemplum Cubi. Proportionalitas harmonica ex arithmetica, & arithmetica vicissim ex harmonica. Datis duobus medium, vel tertium, aut quartum terminum invenire harmonicè proportionalem, totamque progressionem harmonicam. Formula generalis.

DEFINITIO I.

Harmonica proportio trium, vel quatuor quantitatū.

301. MUsica, seu harmonica proportio est, quando tres quantitates ita ordinantur, ut differentia primæ, & secundæ ad differentiam secundæ, & tertiæ eam habeat proportionem, quam habet prima ad tertiam, ita ut nec eadem inter eos sit differentia, ut in arithmetica, nec eadem ratio, ut in geometrica. Exemplo sint tres isti numeri $6.4.3$; quoniam $6-4:4-3::6:3$, cum utrobique sit ratio dupla, dicuntur $6.4.3$ harmonicè proportionales, quamvis ipsi neque eamdem habeant differentiam inter se, neque eamdem rationem, ut patet. Sic etiam tres hi numeri $7.12.42$ harmonicam proportionalitatem constituunt, quia $12-7:42-12::7:42$, cum utrobique proportio sit subsextupla.

Quatuor similiter magnitudines harmonicè proportionales vocantur, cum differentia primæ, & secundæ ad differentiam tertiæ, & quartæ est, ut prima ad quartam. Sic harmonicè proportionales erunt $a.b.c.d$, si $a-b:c-d::a.d$, vel $b-a.d-c::a.d$.

SCHOLION.

Consonantiæ musicæ affinitas.

302. DIcitur autem hujusmodi proportionalitas musica, sive harmonica, quia plerumque ejus numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ musicæ consistunt; ut in priori exemplo inter 6 & 4 est proportio sesquialtera constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, sive Quinta. Item inter 4 & 3 est proportio sesquitertia constituens consonantiam, quam Diatessaron, sive Quartam vocant. Denique inter extremos 6 & 3 cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiam, sive Octavam constituit. Atque eodem modo in plerisque aliis idem cernitur.

DEFINITIO II.

Progressio harmonica.

303. HArmonica proportionalitas dicitur continuari ultra tres terminos, sive ad majores numeros progrediendo, sive regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt harmonicè proportionales. Item, relicto primo,

primo, alii ſequentes tres; &, relictis duobus, ſequentes alii tres; atque ita deinceps. Sed animadvertas velim, in hac continuatione nunquam fore eamdem proportionem inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium; ut in his quatuor numeris 3, 4, 6, 12 continuata dicitur proportionalitas harmonica, quoniam tam tres 3, 4, 6, quàm tres 4, 6, 12 harmonicè proportionales ſunt; ſed priorum extremi 3, & 6 proportionem habent duplam, at extremi poſteriorum 4, & 12 triplam. Quo autem pacto in utramque partem continuari poſſit proportionalitas harmonica, ex iis, quæ ſequuntur, conſtabit.

SCHOLION.

304. Est & hoc notatu dignum, inquit Clavius lib. 5. Geom. elem., in cubo reperiri quatuor terminos in harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter ſe comparati, præcipuas, perfectaſque conſonantias muſicas exprimunt. Nam 6 ejus baſes quadratæ, 8 anguli ſolidi, 12 latera, & 24 anguli plani conſtituunt hos quatuor terminos 6, 8, 12, 24 continuè proportionales harmonicè. Proportio 8 ad 6 eſt ſeſquitertia, quæ conſonantiam Diateſſaron, ſive Quartam conſtituit; proportio verò 12 ad 8 ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſive Quintam; proportio deinde 12 ad 6, vel 24 ad 12 dupla eſt explicans conſonantiam Diapaſon, ſive Octavam.

Conſonantiæ muſicæ in dimenſionibus corporum.

vam. At proportio 24 ad 8 tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Denique proportio 24 ad 6, quæ quadrupla eſt, exhibet conſonantiam Diſdiapaſon, ſive Decimamquintam.

PROBLEMA I.

305. Ex tribus numeris proportionalitatis arithmeticæ quibuſcunque tres numeros in proportionalitate harmonica invenire.

Reſolutio. Primus trium numerorum arithmeticè proportionalium multiplicetur ſeorſim in ſecundum, & tertium; & ſecundus in tertium ducatur: tria hujuſmodi producta erunt harmonicè proportionalia, ut ſubjecta exempla demonſtrant.

Inventio proportionalitatis harmonicæ ex arithmetica.

Arit.	1.2.3	3.7.11	4.6.8
Har.	2.3.6.	21.33.77.	24.32.48.

In omnibus enim ex primo termino arithmeticæ proportionalitatis in ſecundum, & tertium fit primus terminus harmonicæ, & ſecundus; ex ſecundo verò in tertium fit tertius.

Dem. Eſto $\therefore a.b.c$: ducatur a primò in b, deinde in c; & fiant producta ab, ac: multiplicetur quoque ſecundus terminus b per tertium c; & fiat productum bc: dico tria hæc producta ab, ac, bc fore harmonicè proportionalia, hoc eſt, $ab - ac . ac - bc :: ab . bc$.

Cum enim ſit $\therefore a.b.c$, erit $a+c=2b$: quare, ſi utrumque hujus æquationis membrum multiplicetur per eamdem quantitatem abc,

abc, erit $aabc + abcc = 2abbc$; ac proinde $aabc - abbc = abbc - abcc$; hoc est, productum extremarum $\overline{ab - ac} \times bc = \overline{ac - bc} \times ab$ producto mediarum: hinc $ab - ac . ac - bc :: ab . bc$: tria ergo producta ab, ac, bc sunt harmonicè proportionalia.

PROBLEMA II.

306. INvenire tres numeros harmonicè proportionales, quorum extremi, atque adeo differentiæ datam habeant proportionem.

Resolutio, & dem. Assumantur pro libito duo numeri proportionem datam habentes; & inter eos medius arithmeticè proportionalis constituatur; ac demum per n. præced. ex tribus hisce terminis inveniantur tres in proportionalitate harmonica: hi erunt quæsiti. Ut, si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem a ad c, quæratur medius b arithmeticè proportionalis inter a & c: ex his tribus arithmeticè proportionalibus a, b, c orientur hi tres harmonicè proportionales ab, ac, bc, quorum extremi, ut patet, atque adeo differentiæ datam habent rationem a ad c.

COROLLARIUM I.

307. SEquitur ex n. 305. binos numeros trium terminorum harmonicè proportionalium ab, ac, bc binis arithmeticæ proportionalitatis $\div a . b . c$, ex qua orta est, converso ordine esse proportionales; hoc est, $ab . ac :: b . c$, & $ac . bc :: a . b$.

COROLLARIUM II.

308. VIcissim, si primus numerus harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri $aabc$, $abbc$, $abcc$ arithmeticè proportionales. Ita vides ex hac harmonica 2 . 3 . 6 gigni hanc arithmeticam 6 . 12 . 18. Inventio harmonicæ ex arithmeticâ proportionalitate.

PROBLEMA III.

309. DAtis duabus quantitatibus a, & b, invenire tertiam x harmonicè proportionalem $a . b . x$.

Resolutio, & dem. I. Si proportio ad majores quantitates progreditur, ita ordinabitur proportio geometrica: $a . x :: b - a . x - b$; Inventio tertii. adeoque $ax - ab = bx - ax$; & per reductionem $x = \frac{ab}{2a - b}$; & consequenter $a . b . \frac{ab}{2a - b}$ erunt harmonicè proportionales.

Hæc ultima æquatio $x = \frac{ab}{2a - b}$ erit ad instar formulæ generalis, cujus ope inveniri possit tertius terminus harmonicæ proportionis crescentis, datis duobus primis. Sit $a = 10$,

$b = 16$: erit $x = \frac{160}{20 - 16} = \frac{160}{4} = 40$. Hæc eadem æquatio docet, problema ſolvi non poſſe, quoties vel ſecundus terminus b excedit duplum $2a$ primi, vel illi æquatur.

II. Si proportio ad minores terminos regreditur, ita ordinabitur geometrica proportio: $a . x :: a - b . b - x$; eademque æquatio, & formula generalis, ut in primo caſu, elicietur $x = \frac{ab}{2a - b}$; & proportio harmonica erit $a . b . \frac{ab}{2a - b}$. Sit $a = 6$, $b = 3$: erit $x = \frac{ab}{2a - b} = \frac{6 \times 3}{2 \times 6 - 3} = 2$.

Itaque in utroque caſu proportionis harmonicæ creſcentis, vel decreſcentis, regula generalis erit hujuſmodi: factum ex ductu quantitatis primæ in ſecundam dividatur per duplum primæ imminutum ſecundà: quotus erit tertia harmonicè proportionalis quæſita.

COROLLARIUM I.

310. Quòd ſi ex tribus harmonicè proportionalibus $6 . 8 . 12$ terminus ſecundus ſumatur pro a, & tertius pro b, per eamdem formulam $\frac{ab}{2a - b}$ invenietur quartus continuè proportionalis $\frac{8 \times 12}{16 - 12} = 24$. Quarti.

Co-

COROLLARIUM II.

311. Quin immo, cum eodem modo, ſi tertius pro a, quartus pro b ſumatur, quintus inveniri poſſit, & ita porro in infinitum, ſi modò non obſtet caſus notatus in formula generali, hinc datis duobus terminis progreſſio continuatur per eamdem regulam. Itaque, ſi $a = 10$, & $b = 12$, erit tertius $\frac{10 \times 12}{20 - 12} = 15$; inde quartus $= \frac{12 \times 15}{24 - 15} = 20$: quintus $= \frac{15 \times 20}{30 - 20} = 30$: ſextus $\frac{20 \times 30}{40 - 30} = 60$; ſed ulterius continuari nequit, quia ſeptimus eſſet $= \frac{30 \times 60}{60 - 60}$, utì annotavimus in formula $\frac{ab}{2a - b}$. Et totius progreſſionis harmonicæ.

COROLLARIUM III.

312. Ab harmonica proportione $a . b . \frac{ab}{2a - b}$ per n. 309. multiplicatis terminis omnibus per $2a - b$ deduci poteſt hæc alia harmonica proportio $2a^2 - ab . 2ab - b^2 . ab$.

PROBLEMA IV.

313. Datis duabus quantitatibus a, & b, mediam x harmonicè proportionalem invenire $a . x . b$.

Reſol.,

Resolutio, & dem. Si proportio harmonica crescit, proportio geometrica erit $a.b::x-a.b-x$: si harmonica decrescit, geometrica erit $a.b::a-x.x-b$. In utroque casu invenietur $x=\frac{2ab}{a+b}$: quare termini $a.\frac{2ab}{a+b}.b$ erunt harmonicè proportionales. Quòd si termini omnes ad eumdem denominatorem reducantur, & soli numeratores accipiantur, proportio harmonica adhuc habebitur $a^2+ab.2ab.ab+b^2$.

Datis itaque duobus terminis 1, & 2, medius harmonicè proportionalis invenietur per formulam generalem $\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\times1\times2}{1+2}=\frac{4}{3}$: hinc $1.\frac{4}{3}.2$ erunt harmonicè proportionales; reductisque terminis ad eumdem denominatorem, & solis numeratoribus assumptis, adhuc habebitur proportio harmonica 3.4.6. Sic etiam datis duobus 2, & 3, medius harmonicè proportionalis erit $\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\times2\times3}{2+3}=\frac{12}{5}$; adeoque $2.\frac{12}{5}.3$, vel 10.12.15 erunt harmonicè proportionales.

PROBLEMA V.

314. INvenire formulam generalem, per quam proportio harmonica per quotlibet terminos continuetur, datis duobus primis.

Resolutio, & dem. Nihil ferè aliud præstandum,

dum, quàm ut præcedens formula $a.b.\frac{ab}{2a-b}$, in qua datis duobus primis quæritur tertius harmonicè proportionalis designatus per $\frac{ab}{2a-b}$, applicetur exemplo, ex quo quæsita formula generalis progressionis harmonicæ facilè deducitur, hoc pacto. Formula generalis.

Itaque I. sint $\frac{c}{f+d}.\frac{c}{f+2d}$ duo primi termini dati proportionis harmonicæ: ut tertius inveniatur, fiat $\frac{c}{f+d}=a$, $\frac{c}{f+2d}=b$; substitutisque hisce valoribus in formula $x=\frac{ab}{2a-b}$, invenietur tertius terminus $\frac{c}{f+3d}$; & hinc proportio harmonica erit $\frac{c}{f+d}.\frac{c}{f+2d}.\frac{c}{f+3d}$.

II. Fiat $g=f+d$: proportio harmonica præcedens in hanc transformabitur $\frac{c}{g}.\frac{c}{g+d}.\frac{c}{g+2d}$; atqui, utì nuper ostensum est, $\frac{c}{g+d}.\frac{c}{g+2d}.\frac{c}{g+3d}$ sunt harmonicè proportionales: habetur itaque quartus $\frac{c}{g+3d}$.

III. Fiat rursus $h=g+d$: reperientur eodem modo tres termini $\frac{c}{h+d}.\frac{c}{h+2d}.\frac{c}{h+3d}$

 harmo-

harmonicè proportionales, & quintus $\frac{c}{b+3d}$ obtinebitur.

Similiter, si fiat $i=b+d$, & $k=i+d$, & $l=k+d$ &c., novi successivè termini in infinitum reperientur.

Corollarium.

315. Hinc termini $\frac{c}{b+d}\cdot\frac{c}{b+2d}\cdot\frac{c}{b+3d}\cdot\frac{c}{b+4d}\cdot\frac{c}{b+5d}$ &c. constituunt progressionem harmonicam; nimirum hinc oritur series infinita fractionum, quarum unus, idemque semper est numerator; & denominatores sunt termini progressionis arithmeticæ $\div b+d.\, b+2d.\, b+3d$ &c.: series autem harum fractionum erit progressio harmonica. Hac de causa series $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$ &c. dicitur progressio harmonica.

Definitio.

316. Tres quantitates dicuntur contraharmonicè proportionales, si differentia primæ, & secundæ fuerit ad differentiam secundæ, & tertiæ, ut tertia ad primam. Quatuor pariter quantitates sunt contraharmonicè proportionales, si differentia primæ, & secundæ eam habeat rationem ad differentiam tertiæ, & quartæ, quam habet illarum quarta ad primam. Si termini proportionales in priore casu continuentur, oritur progressio contraharmonica.

Scholion.

Hujus proportionis, cum vix habeat usum in Mathesi, satis est notionem attigisse. Tyrones per se ipsi ex data definitione resolvent problemata his similia. Datis duabus quantitatibus invenire tertiam, vel mediam contraharmonicè proportionalem &c.

Caput Septimum.

De binomio, polynomio ad dignitatem quamcunque evehendo, de extractione radicis a qualibet potestate, & de summatione quarumcunque potentiarum, quarum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.

Aggredimur jam calculi infinitesimalis principia quædam, quæ ex tradita natura utriusque progressionis geometricæ finitæ, & infinitæ facilè consequuntur. Ac quamvis sub initium Analysis pleraque hujusmodi problemata resoluta jam sint, tamen in præsens universaliore methodo nobis eadem tractanda sunt, ut sublimiori, quò tendimus, Geometriæ viam aperiant. Quare, ut Tyronibus inserviam, paulatim singula evolvam, &, quid ex quoque sequatur, diligenter exponam.

Synopsis.

Qua certa lege non modò facta litteralia pro quaque potestate binomii reperiantur,

tur, verùm etiam numeri præfixi, quos Uncias vocant. Formula generalis binomii ad potentiam indeterminatam elevati. Applicatio ejusdem ad formulam Newtonianam: hinc generalis methodus inveniendi tum potestates, tum radices per series infinitas, divisionemque sive simplicem, sive repetitam per eamdem regulam perficiendi. Exempla Newtoniana. Eadem generalis formula ad polynomium traducta. Summatio potestatum quorumcunque numerorum naturalium.

PROBLEMA I.

317. INvenire theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.

Sit $a+b$ radix binomia, cujus potestates gradatim ascendendo exhibet subjecta tabella.

$1\,a$	$1\,b$				
$1\,a^2$	$2\,ab$	b^2			
$1\,a^3$	$3\,a^2b$	$3\,ab^2$	b^3		
$1\,a^4$	$4\,a^3b$	$6\,a^2b^2$	$4\,ab^3$	b^4	
$1\,a^5$	$5\,a^4b$	$10\,a^3b^2$	$10\,a^2b^3$	$5\,ab^4$	b^5

&c.

Genesim

Genesim potestatum a radice binomia $a+b$ facilè construes, si radix binomia in seipsam ducatur, ut habeatur quadratum; hoc iterum in radicem, ut habeatur cubus; & cubus in radicem, ut habeatur potestas quarta; & sic continuè.

Ex hujus tabulæ consideratione constat I. singula facta litteralia, seu membra cujusque Facta litteralia.
potestatis, dimensionum esse numero æqualium; nimirum totidem, quot sunt istius potestatis dimensiones.

II. Membra eadem esse continuè proportionalia; quippe quam descendendo amittit a unam dimensionem, eam acquirit b: hinc superius quodque membrum ad proximè subjectum est, ut a ad b.

III. Hinc facile est hæc membra pro quaque potestate exhibere, si fiant duæ progressiones geometricæ, quarum prima a potestate Continuè proportionalia.
quæsita primæ partis radicis incipiat, & in unitatem decrescendo desinat; altera verò ab unitate incipiat, & in quæsitam potestatem secundæ partis radicis crescendo desinat; atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur.

Quærenda sit potestas, puta, sexta hujus radicis binomiæ $a+b$: fiat

Series I. $a^6 \;.\; a^5 \;.\; a^4 \;.\; a^3 \;.\; a^2 \;.\; a^1 \;.\; 1$

Series II. $1 \;.\; b \;.\; b^2 \;.\; b^3 \;.\; b^4 \;.\; b^5 \;.\; b^6$

Facta $1a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$,

ex quibus componitur potestas sexta.

IV. Notabis etiam terminis potestatum præfigi

præfigi numeros, quos uncias cum Ovghtredo vocant, quibus oſtenditur, quoties ſumendum eſt membrum quodque. Qua verò conſtanti lege numeri iſtiuſmodi coefficientes reperiantur, ſic habe: exponentes poteſtatum ſecundæ ſeriei, ſeu ipſius b ſub exponentibus poteſtatum primæ ſeriei, ſeu ipſius a ſcribantur; & nota prima ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem ſubibit unicæ, ſeu numeri coefficientis termini ſecundi poteſtatis. Similiter factum ex nota prima in ſecundam ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore: factum ex prima in ſecundam ex ſerie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unicam, ſeu coefficientem numerum dabit termini tertii poteſtatis æqualis &c.

Numeri præfixi.

Quærendi ſint numeri coefficientes poteſtatis cujuslibet, puta, ſextæ: utraque ſeries exponentium ordinetur modo dicto:

$$6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$
$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$$

Itaque $\frac{6}{1} = 6$ coefficiens term. 2. poteſtatis 6;

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ termini 3;

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$ termini 4;

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ termini 5;

$\frac{6}{1} \times$

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{1} = 6$ term. 6;

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = 1$ term. ultimi.

Conſtat itaque methodus datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi.

Idem generalius.

318. QUòd ſi regulam pro indeterminata potentia deſideres, non alia re opus eſt, quàm ut exponens dicatur m. Duæ autem progreſſiones geometricæ erunt ejuſmodi.

Series I. $a^m \;.\; a^{m-1} \;.\; a^{m-2} \;.\; a^{m-3} \;.\; a^{m-4}$
Series II. $1 \;.\; b \;.\; b^2 \;.\; b^3 \;.\; b^4$ &c.
Facta $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4$ &c.

Similiter invenientur unciæ, ſeu coefficientes, ut ante. Cum enim utriuſque partis radicis exponentes potentiarum ſint

$$m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4$$
$$1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \quad \text{\&c.},$$

erit $\frac{m}{1}$ uncia, ſeu coefficiens term. 2. potentiæ,

$\frac{m \times m-1}{1 \times 2}$ coefficiens tertii,

$\frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3}$ quarti,

$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ quinti &c.

Quare, ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia, Formula generalis.

dentia, & paulo ante inventa ducantur, prodibit formula generalis binomii ad potentiam indeterminatam elevati, nimirum

$$
\begin{aligned}
& a^m \\
& + \frac{m}{1} a^{m-1} b \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} a^{m-4} b^4 ;
\end{aligned}
$$

atque ita porro in infinitum.

Quoniam verò, ut docuimus in calculo exponentiali, $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, & $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$, & $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ &c., substitutis hisce valoribus, formula generalis in sequentem transformatur:

$$
\begin{aligned}
& a^m \\
& + \frac{m \times a^m b}{1 \times a} \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{a^m b^2}{a^2} \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{a^m b^3}{a^3} \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{a^m b^4}{a^4} \text{ \&c.}
\end{aligned}
$$

Aliter per formulam Newtonianam.

219. Hanc Newtonus exponit tom. 1. opusc. 10. in epistola ad Henricum Oldem-

burgium, cujus verba non prius describam, quàm quæ breviter a Newtono contrahuntur, ea in Tyronum gratiam latiùs evolverim, ut, quomodo postremò a nobis proposita formula in Newtonianam longè concinniorem, breviorémque transformetur, facilè assequantur.

Formula Newtoniana.

Sit rursum radix binomia $a+b$: pone $a = P$; & $\frac{b}{a} = Q$: erit $a+b = P + PQ$; & $a^m = P^m$; $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$; $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$; $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ &c. Hos valores substitue in superiore formula: evadet

$$
\begin{aligned}
& P^m \\
& + \frac{m}{1} \times P^m Q \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times P^m Q^2 \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times P^m Q^3 \\
& + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times P^m Q^4 \text{ \&c.}
\end{aligned}
$$

Ponatur iterum $P^m = A$: erit $\frac{m}{1} \times P^m Q = \frac{m}{1} AQ$.

Sit $\frac{m}{1} P^m Q = B$: erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$.

Sit $\frac{m-1}{2} BQ = C$: erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ$.

Sit $\frac{m-2}{3} CQ = D$: erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} DQ$.

Sit $\frac{m-3}{4} DQ = E$: erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} P^m Q^5 = \frac{m-4}{5} EQ$.

Sit $\frac{m-4}{5} EQ = F$: erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \frac{m-5}{6} P^m Q^6 = \frac{m-5}{6} FQ$ &c. in infinitum.

Habemus ergo formulam generalem binomii $a+b$ ad quamcunque indeterminatam potentiam elevati:

$$\overline{a+b}^m = \overline{P+PQ}^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ + \frac{m-5}{6} FQ \text{ \&c.}$$

Exemplum.

320. Sit invenienda poteſtas quarta radicis 18, ſeu binomii $10+8$: ſubſtituantur in formula pro litteris determinati valores: fiat $m=4$, $P=10$, $Q=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

Itaque

Itaque $P^m = 10^4 = 10000 = A$;

$mAQ = 4 \times 10000 \times \frac{4}{5} = \frac{160000}{5} = 32000 = B$;

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2} \times 32000 \times \frac{4}{5} = 38400 = C$;

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3} \times 38400 \times \frac{4}{5} = 20480 = D$;

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} \times 20480 \times \frac{4}{5} = 4096 = E$;

$\frac{m-4}{5} EQ = 0$.

Quamobrem
$$\begin{array}{r} 10000 = A \\ 32000 = B \\ 38400 = C \\ 20480 = D \\ 4096 = E \\ \hline \end{array}$$

Poteſtas quarta $104976 = \overline{10+8}^4$.

Scholion I.

Eadem poteſtas quarta invenietur, ſi radix 18 in duas quaſcunque alias partes, puta, in 6, & 12 ſecetur: quo caſu erit $P=6$, $Q=\frac{12}{6}=2$; & conſequenter $P^m = 6^4 = 1296 = A$ &c., ut prius.

Scholion II.

Notabis ſeriem terminari, ſi m explicetur per numerum determinatum.

PRO-

PROBLEMA II.

321. PEr eamdem formulam radicem quamcunque extrahere.

Si quantitas litteralis m explicetur per numerum fractum, ideſt, per exponentem quantitatis radicalis, eadem formula, ſeu ſeries $P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipſius $P + PQ$. Quamobrem idem theorema uſui erit extractioni radicis.

EXEMPLUM.

SIt $\sqrt{aa-xx} = \overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}$: erit ergo $m = \frac{1}{2}$; $P = aa$; $Q = \frac{-xx}{aa}$. Itaque facta ſubſtitutione.

$$P^m = P^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A;$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{1}{2}a \times \frac{-xx}{aa} = -\frac{xx}{2a} = B;$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times -\frac{xx}{2a} \times -\frac{xx}{aa} = \frac{1-2}{4} \times \frac{x^4}{2a^3} = -\frac{x^4}{8a^3} = C;$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \times -\frac{x^4}{8a^3} \times -\frac{xx}{aa} = \frac{1-4}{6} \times \frac{x^6}{8a^5} = -\frac{3}{6} \times \frac{x^6}{8a^5} = -\frac{x^6}{16a^5} = D;$$

$m - 3$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \times -\frac{x^6}{16a^5} - \frac{xx}{aa} = \frac{1-6}{8} \times \frac{x^8}{16a^7} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E;$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \times \frac{-5x^8}{128a^7} \times \frac{-xx}{aa} = \frac{1-8}{10} \times \frac{5x^{10}}{128a^9} = \frac{-7x^{10}}{256a^9}$$ &c. in infinitum.

Habes ergo quæſitam radicem $\sqrt{aa-xx} = a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinitum.

SCHOLION I.

322. UT autem una, eademque generalis formula utrique uſui accommodetur inveniendi tum radices, tum poteſtates, diviſionemque etiam ſive ſimplicem, ſive repetitam per eamdem regulam perficiendi, ſubſtituere oportet cum Newtono in formula generali pro m exponentem fractum $\frac{m}{n}$; nam, ubi eadem formula erit adhibenda ad geneſes poteſtatum eliciendas, in eo caſu pro n aſſumetur 1.

Quæ autem pluribus hactenus complexus ſum in gratiam Tyronum, preſſè, ac breviter loco citato ſic a Newtono traduntur.

Sed extractiones radicum multùm abbreviantur per hoc theorema: $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ$

$+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ$ *&c.* *Ubi* $P+PQ$ *significat quantitatem, cujus radix, vel etiam dimensio quævis, vel radix dimensionis investiganda est,* P *primum terminum quantitatis ejus,* Q *reliquos terminos divisos per primum, &* $\frac{m}{n}$ *numeralem indicem dimensionis ipsius* $P+PQ$; *sive dimensio illa sit integra, sive, ut ita loquar, fracta, sive affirmativa, sive negativa. Nam, sicut Analystæ pro* aa, aaa *&c. scribere solent* a^2, a^3 *&c., sic ego pro* $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[2]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^5}$ *&c. scribo* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; *& pro* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$ *scribo* a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}; *& sic pro* $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3+bbx}}$ *scribo* $aa\times\overline{a^3+bbx}^{-\frac{1}{3}}$; *& pro* $\frac{aab}{\sqrt[3]{\overline{a^3+bbx}\times\overline{a^3+bbx}}}$ *scribo* $aab\times\overline{a^3+bbx}^{-\frac{2}{3}}$. *In quo ultimo casu, si* $\overline{a^3+bbx}^{-\frac{2}{3}}$ *concipiatur esse* $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$ *in regula, erit* $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$, *&* $n=3$. *Denique pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo* A, B, C, D *&c.; nempe* A *pro primo termino* $P^{\frac{m}{n}}$, B *pro secundo* $\frac{m}{n}AQ$; *& sic deinceps.*

Extractio radicum.

Cæterùm usus regulæ patebit exemplis.

SCHO-

Scholion II.

Quæret fortasse Tyro, cur hæc expressio $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3+bbx}}$ transformetur a Newtono in hanc alteram $aa\times\overline{a^3+bbx}^{-\frac{1}{3}}$; & sic de reliquis. Hoc autem consequitur ex ipso calculo exponentiali, ut ipse innuit; nam, sicuti $\frac{1}{a}=a^{-1}$, & $\frac{1}{a^m}=a^{-m}$, & $\frac{2}{a^m}=2a^{-m}$, & $\frac{p}{a^m}=pa^{-m}$, & $\frac{p}{\sqrt[n]{a^m}}=pa^{-\frac{m}{n}}$, ita $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3+bbx}}=aa\times\overline{a^3+bbx}^{-\frac{1}{3}}$ &c.

Exemplum I.

323. Est $\sqrt{cc+xx}=\overline{cc+xx}^{\frac{1}{2}}=c+\frac{xx}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}$ &c.

Nam in hoc casu est $P=cc$, $Q=\frac{xx}{cc}$, $m=1$, $n=2$, $A=P^{\frac{m}{n}}=cc^{\frac{1}{2}}=c$, $B=\frac{m}{n}AQ=\frac{xx}{2c}$, $C=\frac{m-n}{2n}BQ=\frac{-x^4}{8c^3}$ &c.

P 2 EXEM-

Exemplum II.

ESt $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}=\overline{c^5+c^4x-x^5}^{\frac{1}{5}}=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}+$ &c.

Patet substituendo in allatam regulam 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q.

Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q; & tunc evadet $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}=-x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9}+$ &c. Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit: posterior si valde magnum.

Exemplum III.

ESt $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3-aay}}$ (hoc est, $N\times\overline{y^3-aay}^{-\frac{1}{3}}$) $=N\times\frac{1}{y}+\frac{aa}{3y^3}+\frac{a^4}{9y^5}+\frac{7a^6}{81y^7}+$ &c.

Nam $P=y^3$; $Q=\frac{-aa}{yy}$; $m=-1$; $n=3$; $A=P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times-\frac{1}{3}}=y^{-1}=\frac{1}{y}$; $B=\frac{m}{n}\times AQ=\frac{-1}{3}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy}=\frac{aa}{3y^3}$ &c.

Exem-

Exemplum IV.

RAdix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$, hoc est, ex $\overline{d+e}^{\frac{4}{3}}$, est $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+$ &c.

Nam $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=4$; $n=3$; $A=P^{\frac{m}{n}}=d^{\frac{4}{3}}$ &c.

Exemplum V.

EOdem modo simplices etiam potestates eliciuntur; ut si quadrato-cubus ipsius $d+e$, hoc est, $\overline{d+e}^{5}$, seu $\overline{d+e}^{\frac{5}{1}}$ desideretur, erit juxta regulam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, $n=1$; adeoque $A=P^{\frac{m}{n}}=d^5$; $B=\frac{m}{n}AQ=5d^4e$; & sic $C=10d^3ee$; $D=10dde^3$; $E=5de^4$; $F=e^5$; & $G=\frac{m-5n}{6n}FQ=0$; hoc est, $\overline{d+e}^{5}=d^5+5d^4e+10d^3ee+10dde^3+5de^4+e^5$.

Exem-

Exemplum VI.

324. Quinetiam divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eamdem regulam
Divisio. perficitur; ut si $\frac{1}{d+e}$, hoc est, $\overline{d+e}^{-1}$, sive $\overline{d+e}^{-\frac{1}{1}}$, in seriem simplicium terminorum resolvendum sit, erit juxta regulam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=-1$, $n=1$. Itaque $A=P^{\frac{m}{n}}$ $=d^{-\frac{1}{1}}=d^{-1}$, seu $\frac{1}{d}$; $B=\frac{m}{n}\times AQ=-1$ $\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d}=-\frac{e}{dd}$; & sic $C=\frac{ee}{d^3}$; $D=-\frac{e^3}{d^4}$ &c. hoc est, $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+$ &c.

Exemplum VII.

Sic & $\overline{d+e}^{-3}$, hoc est, unitas ter divisa per $d+e$, vel semel per cubum ejus, evadit $\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6ee}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+$ &c.

Exemplum VIII.

Et $N\times\overline{d+e}^{-\frac{1}{3}}$, hoc est, N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$, evadit $N\times\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}$ $-\frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}}+\frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}}-\frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}}+$ &c.

Exemplum IX.

Et $N\times\overline{d+e}^{-\frac{3}{5}}$, hoc est, N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$, sive $\frac{N}{\sqrt[5]{d^3+3dde+3dee+e^3}}$, evadit N $\times\frac{1}{d^{\frac{3}{5}}}-\frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}}+\frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}}-\frac{52e^3}{125d^{\frac{13}{5}}}+$ &c.

Scholion.

325. Per eamdem regulam geneses potestatum, divisiones per potestates, aut per quantitates radicales, & extractiones radicum altiorum in numeris etiam commodè instituuntur. Similiter, si numerus, ex quo radix extrahenda, non sit potestas perfecta, potestas proximè minor fiat $=P$, & residuum post extractionem more vulgari institutam per eamdem divisum $=Q$, $m=1$, & n exponens di-

gnitatis, cujus radix desideratur. Itaque ope ejusdem formulæ generalis obtinebitur numerorum series infinita, certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens.

EXEMPLUM.

Quæratur $\sqrt{2}$: quadratum proximè minus $= 1 = P$: residuum hoc ex 2 subducto $= 1 = Q$: $m = 1$, & $n = 2$. Hinc

$P^{\frac{m}{n}} = 1 = A$;

$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} = B$;

$\frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4 \times 2} = C$;

$\frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{3}{6} \times -\frac{1}{4 \times 2} = +\frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} = D$;

$\frac{m-3n}{4n} D Q = -\frac{5}{8} \times \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} = -\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = E$;

$\frac{m-4n}{5n} E Q = -\frac{7}{10} \times -\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$ &c.

Est ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 8} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} -$ &c.; hoc est, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c.

Ubi

Ubi series fractionum designat partem radicis unitate minorem. Quamobrem, cum $\sqrt{2}$ sit diagonalis quadrati, posito ejus latere $= 1$, obtinebitur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope veræ ad praxim sufficientes duci possunt. Nimirum, si pro diagonali sumatur $1 + \frac{1}{2}$, erit ratio $1 + \frac{1}{2} : 2 :: 3 : 1$ justo major, quàm diagonalis ad latus; sed excessus consistet infra $\frac{1}{8}$. Si pro diagonali sumatur $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$, seu $\frac{11}{8}$, erit ratio $\frac{11}{8} : 1 :: 11 : 8$ justo minor, quàm diagonalis ad latus; sed defectus consistet infra $\frac{1}{16}$; & ita porro.

PROBLEMA III.

326. Eamdem generalem formulam traducere ad polynomium ad quamcunque dignitatem evehendum.

Polynomium quodvis pro binomio accipe, assumptis pluribus partibus pro una: ope ejusdem formulæ invenies cujuslibet binomii potestatem quæsitam.

Sit trinomium $c + d + g$, cujus potestas quarta quæratur: consule jam generalem formulam $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b +$ &c.; vel eamdem magis contractam a Newtono, quod perinde est. Fiat $c = a$, & $d + g = b$: erit $\overline{c + d + g}^4 = c^4 + 4c^3 \times \overline{d + g} + 6c^2 \times \overline{d + g}^2 + 4c \times \overline{d + g}^3 + \overline{d + g}^4$.

Nam

Nam $a^m = c^4$;

$m a^{m-1} b = 4c^3 \times \overline{d+g}$;

$\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 = 6c^2 \times \overline{d+g}^2$;

$\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 = 4c \times \overline{d+g}^3$;

$\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} a^{m-4} b^4 = \overline{d+g}^4$.

Subſtitue jam per eamdem formulam valores:

$\overline{d+g}^2 = dd + 2dg + g^2$;

$\overline{d+g}^3 = d^3 + 3d^2 g + 3dg^2 + g^3$;

$\overline{d+g}^4 = d^4 + 4d^3 g + 6d^2 g^2 + 4dg^3 + g^4$.

Hinc habebis ſingula membra quartæ poteſtatis ejuſdem trinomii $\overline{c+d+g}^4 = c^4 + 4c^3 d + 4c^3 g + 6c^2 d^2 + 12 c^2 dg + 6c^2 g^2 + 4cd^3 + 12cd^2 g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3 g + 6d^2 g^2 + 4dg^3 + g^4$.

GASPAR JOSEPH GAGNA

E SOCIETATE JESU PRÆPOSITUS PROVINCIALIS IN PROVINCIA MEDIOLANENSI.

CUm Librum, cui titulus eſt: *In Arithmeticam univerſalem* ISAACI NEWTONI *Commentaria* a P. Antonio Lecchi Societatis noſtræ Sacerdote compoſitum aliquot ejuſdem Societatis Theologi, quibus commiſſum fuit recognoverint, & in lucem edi poſſe probaverint: facultate nobis a R. P. N. Ignatio Vicecomite Præpoſito Generali communicata concedimus, ut typis mandetur, ſi ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has Literas manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo Societatis noſtræ munitas dedimus.

Mediolani die 17. Novembris 1752.

Gaſpar Joſeph Gagna.

Loco ✠ Sigilli.